Sr. Director de la Revista DYNA

Hondarribi 6 de Enero de 2005

Estimado señor Marañon:

En la revista DYNA (Volumen LXXIX –Nº6), en la Pág 89, aparece Un **problema de Fermat.**

He resuelto (o al menos eso creo) una parte del problema, la cual le remito por si fuera de su interés, del de su autor D. **Juan Ruiz de Tortosa** (al cual quiero agradecer su problema y rogarle no dé importancia a los muy pequeños fallos de su dibujo, que indico).

Si considera interesante la publicación en DYNA de esta solución puede hacerla.

No he conseguido dar con la respuesta al punto c) pero me gustaría conocerla. Pienso que debería ser modesto y admitir que no soy tan bueno.
Reciba un muy cordial saludo.

Luis Mª Aznar
Ingeniero Industrial

Respuestas al problema de Fermat (DYNA Jul-Ag-Sept. 2004)

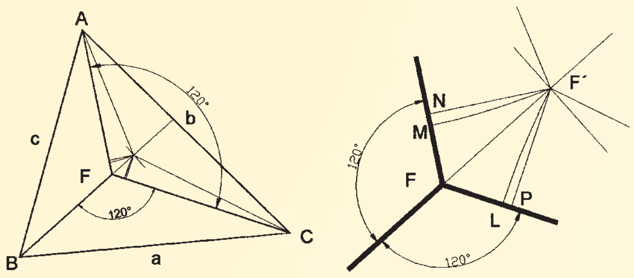
a) Demostración de que el punto F es aquél cuya suma de distancias a los vértices del triángulo es mínima.

El punto **F** es el punto desde el cual se ven los lados del triángulo abarcando **120º**, ya que el ángulo **BFC** abarca un ángulo central de **240º** en la circunferencia correspondiente al lado **a** y, al ser un ángulo inscrito, su valor es la mitad del valor del ángulo central correspondiente.

La suma de distancias es una función de la posición del punto **F**, es decir de sus coordenadas **x** e **y**, el plano tangente a la superficie representante de dicha función es horizontal en dicho punto **F**, por lo que el desplazamiento en cualquier dirección debe dar un aumento de dicha función, en particular sobre la recta **FB**. Sí en la demostración no interviene ninguna particularidad de la recta **FB**, también será valida para la **FC**, y por lo tanto para cualquier dirección.

El paso siguiente de la demostración es demostrar que, si desplazo el punto **F** sobre la línea **FB**, la suma de distancias aumenta. Dicho desplazamiento debe estudiarse en los dos sentidos posibles: alejándose de **B** y acercándose a **B**.

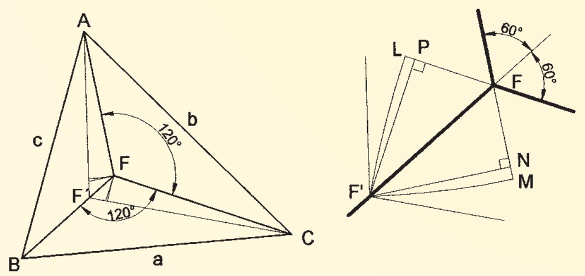
El dibujo anterior tiene dos partes, son el mismo dibujo, sólo que la parte derecha es la parte central ampliada para mayor claridad. En él existe un punto **F’**, que está sobre la línea **BF**. Haciendo centro en A trazamos un arco de circunferencia que pase por **F’** y corta a **FA** en **M.** Desde **F’** trazamos la perpendicular a **FA** que la corta en **N.** La suma buscada se ve incrementada en el trazo **FF’** y disminuida en **FM+FL**.



FF’=FN+FP ya que **FN=FF’cos60º=FF’/2** y **FP=FF’cos60º=FF’/2.**

Como **FM<FN y FL<FP ; FF’>FM+FL** luego la longitud aumenta más de lo que disminuye.

El nuevo dibujo tiene dos partes; son el mismo dibujo, sólo que la parte derecha es la parte central ampliada para mayor claridad. En él existe un punto **F’** que está sobre la línea **BF**, pero más próximo a **B** que **F**. Haciendo centro en A trazo un arco de circunferencia que pase por **F’** y corta a **FA** en **M**, desde **F’** trazo la perpendicular a **FA** y la corta en **N**, la suma buscada se ve disminuida en el trazo **FF’** y aumentada en **FL+FM**.



FF’=FP+FN ya que **FP=FF’cos 60º=FF’/2** y **FN=FF’cos 60º=FF’/2.**

Como **FL>FP** y **FM>FN; FF’<FL+FM** luego la longitud aumenta mas de lo que disminuye.

b) Llamemos **F** al punto de corte de las circunferencias relativas a los lados **BC** y **CA**

El ángulo **BFC** mide 120º por estar inscrito en una circunferencia y su ángulo central abarcar 240º.

El ángulo **CFA** mide 120º por la misma razón (circunferencia relativa al lado AC)

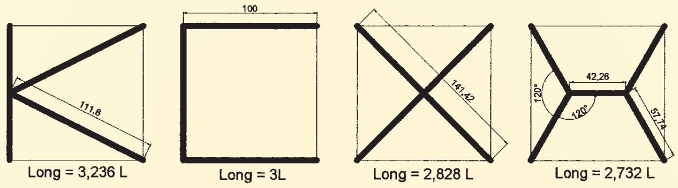
El ángulo **BFA** medirá por lo tanto 360-(120+120) = 120º por lo que está sobre la tercera circunferencia, la relativa al lado **AB**.

No veo la necesidad de que triángulo sea acutángulo. De hecho, el dibujo está sobre un triángulo obtusángulo. Es necesario que todos los ángulos sean menores de 120º ya que, en otro caso, el punto **F**, solución del problema, coincide con el vértice cuyo ángulo sea igual o mayor de 120º.

El dibujo está mal hecho ya que las tres circunferencias no se cortan en un punto y ello se debe a que el triángulo equilátero relativo al lado AC no es equilátero en el dibujo.

Este problema me recuerda mucho a uno que circula en cursillos sobre métodos y tiempos referido a falsas soluciones perfectas. En él se pide que se diseñe una carretera de mínima longitud que una los cuatro vértices de un cuadrado. Habitualmente trazamos las dos diagonales del cuadrado y por su simetría y belleza pensamos que ésta es la solución. Aunque la longitud del camino es muy poco superior a la solución verdadera, no es la solución. La solución (Ver figura) lleva a caminos con uniones de tres rectas siempre formando 120º entre ellas.

Este problema está relacionado con la Y vasca: los vértices del triángulo son San Sebastián, Bilbao y Vitoria y el punto central de la Y es aproximadamente Arrasate (Mondragón).



El valor de la suma puede calcularse groseramente, llamando Xa, Ya a las coordenadas del vértice A, y análogamente Xb, Yb a las del B, Xc, Yc a las del C y Xf, Yf a las punto F.

La distancia FA será: $Fa = \sqrt{(Xf - Xa)^2 + (Yf - Ya)^2}$, análogamente FB y FC, sumarlas, y, teniendo en cuenta que Xa, Ya; Xb, Yb; Xc, Yc son constantes, obtenemos una función f(Xf,Yf). Derivando F respecto a Xa e igualando dicha derivada a 0, luego respecto a Ya y haciéndola = 0, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución son las coordenadas de F (Xf,Yf). Es probable que no observemos los 120º de los ángulos AFB, BFC y CFA. La sustitución de Xf e Yf en F(Xf,Yf) nos dará el valor pedido. Esta forma de operar nos aleja del sentido geométrico del problema... ■

Sr. D. José Miguel Maranón
Director de Dyna
Alameda de Mazarredo, 69, 2° 48009 Bilbao

Madrid, 18/02/05

Querido José Miguel:

¿Cómo estás? Sólo estoy dispuesto a escuchar tus buenas noticias. Sigues en la brecha y yo también. Me dedico a escribir y la ETSII ha tenido el detalle de permitirme seguir usando mi mesa de trabajo con todos los medios habituales. Trabajo de ocho a diez horas al día... Escribo un libro sobre Economía que sorprenderá. Tiene esta tesis: La Economía ha de tener dos capítulos básicos, el Mercado y el Conocimiento.

Hasta ahora, el Mercado usa el Conocimiento únicamente para gestionar sus necesidades. Mi tesis es que también es creador de Economía por sí mismo y sin necesidad de llegar al Mercado. Una cosa revolucionaria que, si triunfa, corregirá el efecto invernadero creando riqueza. Tendrás noticias cuando esté acabado. Hallo propuestas que sorprenderán, que crearán riqueza y nuevas actividades nunca consideradas.

Anuncias un número sobre Energía. Pertenezco al Grupo de Protección del Cielo, GPC, que combate la contaminación lumínica, tal vez la más grave de todas, por desconocida y porque todos, absolutamente todos, la estamos creando.

Este Grupo nació desde la Astronomía y la preside un colega de oficio, **Francisco Pujol Clapés**. Funciona muy bien, somos pocos, pero se nos respeta mucho. Queremos estar en ese número.

Te mando el último Boletín y la convocatoria del próximo acto que celebraremos en el **Colegio de Madrid**, COIIM, por tercer año consecutivo. A partir de ahora se pondrá en contacto contigo Francisco Pujol.

Piensa que el 35% de la energía es para alumbrado y que se despilfarra entre el 35 y el 50% del alumbrado. Cifras terribles, no sólo por la contaminación que se crea, sino porque esas rentas han dejado de hacer otros actos verdaderos creadores de riqueza. Estudio el tema en mi libro.

José Miguel, te dejo. Un abrazo profundo.

Manuel Luna de Toledo