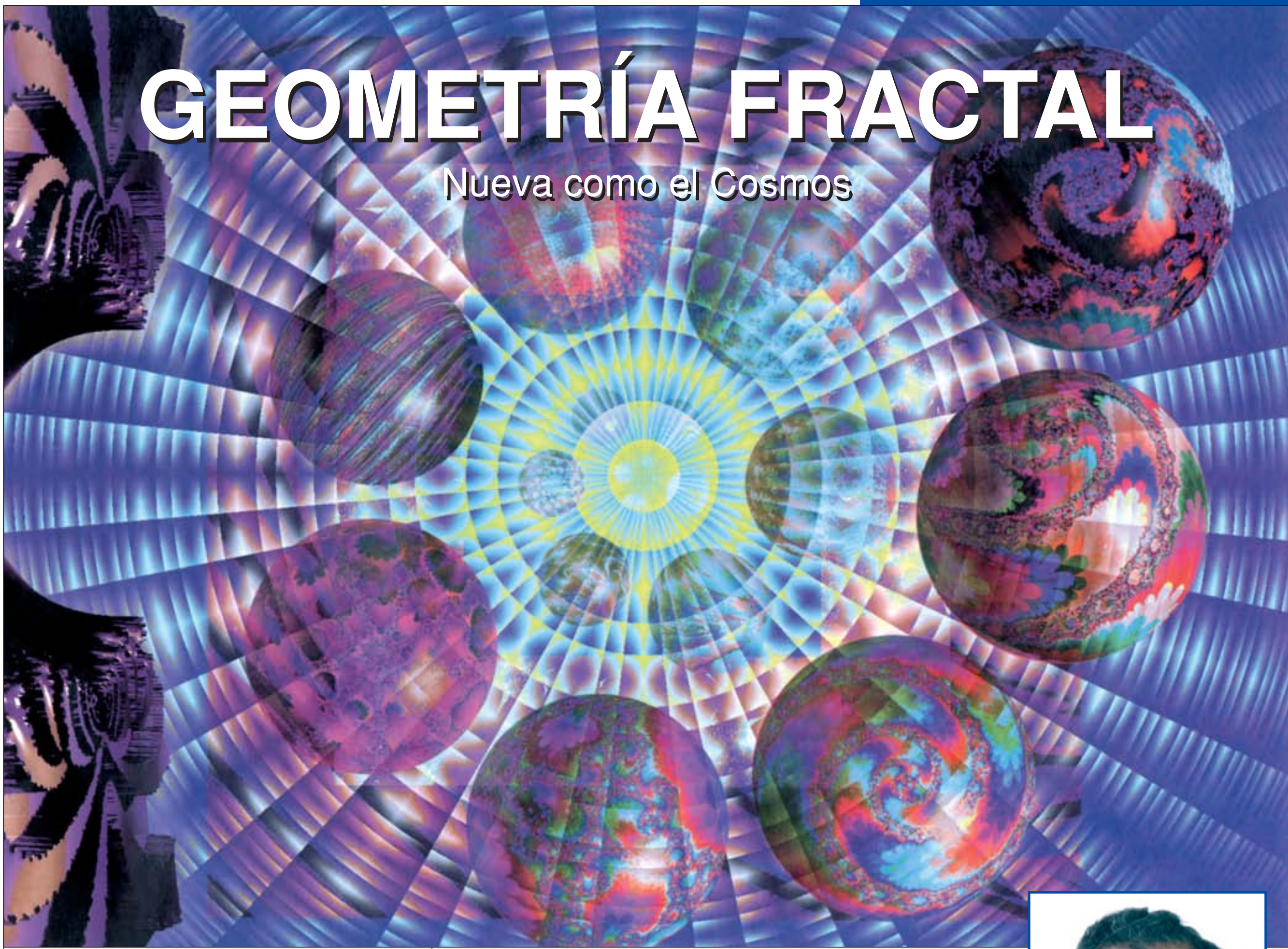
GEOMETRÍA FRACTAL

Nueva como el Cosmos



Pedro Pérez Buendía
Dr. Ingeniero Industrial

La Evolución es el Caos con retroalimentación. Dios juega a los dados con el Universo, pero con dados "cargados". Ahora nuestro reto es el de encontrar las reglas con las que están cargados.

***Joseph Ford**, GIT (Georgia Institute of Technology)*

INTRODUCCIÓN. ¿POR QUÉ LA GEOMETRÍA FRACTAL?

La Geometría **Fractal**, como todas las aportaciones importantes de la Ciencia, viene a cubrir un hueco del Conocimiento, a satisfacer una necesidad del Saber, es un avance revolucionario de la Ciencia que nos sirve de gran ayuda para comprender el mundo real. Esta necesidad venía reclamando un desarrollo geométrico añadido a lo ya conocido, capaz de enfrentarse al mundo real en sus formas reales. Lo ha dicho muy claramente Benoît **Mandelbrot**, padre de los fractales, al que citaremos extensamente: *"Las nubes no son esferas"* pudiendo añadir: ni paralepípedos, ni las nubes (o cualesquiera otras formas naturales) se pueden representar por figuras geométricas regulares o irregulares de las que se tienen amplias descripciones con desarrollos gráficos y de cálculo exhaustivos.

La geometría fractal o de los fractales describe la complejidad de la realidad más allá de la geometría euclidiana y es importante porque desvela un nuevo campo de las Matemáticas, directamente aplicable al estudio de la Naturaleza (animal, vegetal o mineral).

Mandelbrot comenzó considerando algo tan conocido como que el mundo en que vivimos no está formado por objetos y figuras de perfiles regulares; En la Naturaleza no aparecen tales formas rectangulares como en las cajas o en los edificios construidos por el hombre, es decir, el mundo real está lleno de perfiles irregulares. Las superficies planas o las formas regulares son excepción en la Naturaleza. De aquí se extrae una primera conclusión, por lo demás tan obvia como que estamos acostumbrados a aceptar una geometría que describe figuras que raramente (o nunca) se encuentran en el mundo real. La geometría de **Euclides** describe objetos ideales: cuadrados, círculos, cubos, esferas, etc. que si actualmente se encuentran en nuestras vidas provienen, en su mayoría, de las manos del hombre y no originalmente de las de la Naturaleza.

Podemos resumir diciendo que durante siglos se ha intentado medir torpemente con patrones y reglas equivocadas, con formas regulares y simétricas Por ejemplo, si consideramos la forma de los seres humanos, encontramos que hay una cierta simetría, pero, a pesar de ello, es una figura indescriptible en términos euclidianos. No hay perfiles uniformes. A partir de pensamientos de este tipo es cuando **Mandelbrot** se dio cuenta de que, desde un punto de vista científico, se estaba desaprovechando una forma de describir las formas y objetos del mundo real.

De aquí que este matemático, (nacido en Polonia en 1924, posteriormente vivió en Francia y actualmente residente en los EE.UU.), cuando comenzó a desarrollar, en 1977, la geometría de las formas irregulares que nos encontramos en la Naturaleza, acuñara la palabra *"fractal"* tomándola del latín, pues *"fractus"* significa: discontinuo, fragmentado, desmenuzado, roto. Particularidades, todas ellas, que van a ser tratadas por la geometría fractal

¿QUÉ ES LA GEOMETRÍA FRACTAL?

Como primera definición se puede avanzar que la Geometría fractal, o de los fractales, se caracteriza por estudiar las formas que poseen longitudes infinitas con detalles infinitos, y, por tanto, ausencia de continuidad o "derivabilidad". En la Fig.1 se puede ver una curva diferenciable que se muestra compleja, pero que, tras sucesivos cambios de escala en cualquier parte de ella, se llega a un sistema ordinario (un segmento). Sin embargo, una curva no diferenciable (curva fractal) mostrará siempre el mismo grado de complejidad.

Generalizando, se dice que los fractales son aquellos conjuntos geométricos que permanecen invariables (inmutables) ante el cambio de escala. El comportamiento fractal es una complejidad que no presenta longitudes características espacio-temporales.

Resumiendo, la palabra fractal engloba las geometrías y conjuntos matemáticos que presentan invarianza al cambio de escala. Propiedad conocida con el nombre de *"autosemejanza"*, entendida como la semejanza estadística al cambio de escala, forma y comportamiento. Mirando a nuestro alrededor, es posible encontrar miles de tales conjuntos perfectamente armonizados con el entorno natural. Luego citaremos varios ejemplos.

La Geometría fractal representa un nuevo lenguaje, muestra una nueva visión de cosas tan comunes como una nube, un helecho o un sistema sanguíneo. Este lenguaje se expresa mediante algoritmos que difícilmente son desarrollables sin el concurso de los ordenadores. Una vez dominado este lenguaje, la descripción de una nube se hace tan precisa como la de cualquier otro objeto. Se ha llegado a señalar (**Barnsley** y **Devaney**, 1988) que este conocimiento está haciendo perder las percepciones clásicas de los objetos naturales, eliminando la inocencia e imagen lúdica que representan.

A continuación expondremos, de forma superficial, la trayectoria histórica de esta ciencia, describiremos su potencial en el mundo real y echaremos un vistazo a sus aplicaciones e implicaciones en la Ciencia y en la Tecnología. Con ello se pretende exponer una breve introducción que dé paso a una inquietud en los lectores por adentrarse en esta nueva herramienta de la ciencia que, como decimos, ya está en manos de la tecnología.

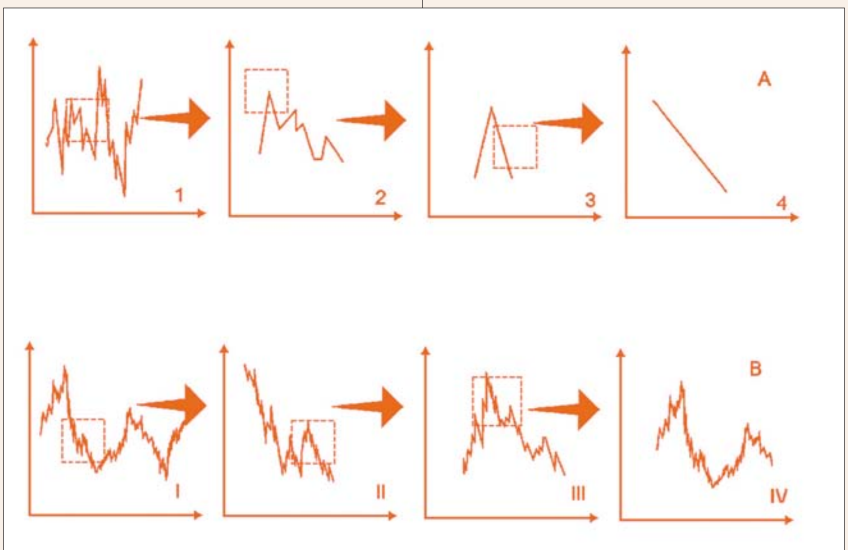


Fig. 1 - (A): Curva diferenciable. Aplicando "zooms" sucesivos se llega a obtener una línea recta.
(B): Curva no diferenciable. Nunca decrece la complejidad. Incluso en (IV) aparece una curva semejante a la original.

ORIGEN DE LOS FRACTALES. ¿DE DÓNDE? Y ¿CUÁNDO?

La Geometría fractal es una extensión de la Geometría clásica, no reemplaza a ninguna de sus áreas, pero profundiza y enriquece su potencial. Desde su nacimiento es patente la ligadura tan estrecha que mantiene con la Matemática moderna. Con independencia del momento reciente de su concepción, es indudable que hasta que las Matemáticas no han alcanzado un nivel propicio, el desarrollo de los fractales estaba muy limitado. Ahora, por el contrario, está experimentando un fuerte desarrollo pues, como decimos, camina en paralelo con la gran aplicación de las Matemáticas que es la de los potentes ordenadores en los que necesita apoyarse. Gracias a esta herramienta tan útil, la Geometría fractal puede obtener modelos precisos de estructuras físicas de todo tipo; por ejemplo, desde pequeñas conchas marinas a galaxias gigantes.

La Geometría euclidiana, con sus líneas rectas y sus círculos, venía explicando el Universo tan maravillosamente bien que, durante más de dos milenios, los científicos se encontraban cómodos con sus principios, por tanto no se analizaban sus raíces, ni se cuestionaban sus limitaciones. Por fortuna, a finales del siglo XIX, los matemáticos **Karl Weierstrass**, **Georg Cantor** y **Henri Poincaré** se propusieron buscar una Geometría capaz de explicar lo que la euclidiana era incapaz de explicar. Ya un siglo antes, inteligencias tales como las de **Newton** y **Leibnitz** habían dado pasos importantes con el nuevo método de razonamiento que introdujo el Cálculo infinitesimal y las nuevas herramientas de cálculo, que fueron las derivadas y las integrales, a pesar de la falta de una justificación teórica suficientemente sólida.

Gracias a ello, ya pudo establecer **Laplace** (1749-1827) que, dada la posición de cada partícula en el Universo, en un momento dado, y conocida su velocidad de cambio, podríamos predecir el futuro de todo el Universo para siempre y con todo detalle. Incluso en esa época se resolvió el caso de un punto singular en una curva, partiendo la curva por ese punto y estudiando por separado las resultantes. En aquel tiempo lo que no llegó ni siquiera a plantearse ningún matemático fue la forma de trabajar con una curva en la que todos sus puntos fuesen singulares. Esto hubiese sido un atentado inconcebible al concepto de continuidad.

Sin embargo, este es el caso que se planteó **Weierstrass** en 1861, (suponemos que fue porque disfrutaba encontrando fallos a los razonamientos de los demás), sobre la formulación de una curva que no fuera diferenciable en ninguno de sus puntos, constituyendo lo que pudiéramos considerar el primer descubrimiento de un fractal matemático. Claro, como era de esperar, la función de Weierstrass fue considerada una aberración "patológica" producto de una mente no humana.

Pero **Weierstrass** y **Cauchy** en esos momentos se dedicaron a desarrollar una nueva rama de la Matemática, denominada *"Análisis"*. El Análisis era producto de su intento de aportar un rigor más profundo a las Matemáticas. De aquí se dio paso a la búsqueda de nociones más precisas de los números y del concepto "continuidad". Por ello no tardaron en ser definidos y clasificados los números reales y los imaginarios, cerrando así, de una forma completa, el amplio campo del concepto de número.

El siguiente paso, a finales del siglo XIX, fue el desarrollo por **Cantor** de la *Teoría de conjuntos*. Recordemos el gran avance que supuso este paso debido a su principal característica, aquélla de que, estando formados los conjuntos por una reunión de elementos, se pueden tratar todo el conjunto, a su vez, como un objeto unidad. Aquí es donde Cantor toma el testigo a **Weierstrass** y, superando el acto de fe que supone asumir el concepto matemático de *"infinito"*, comienza sus consideraciones sobre las distintas categorías (órdenes) de infinitos, al demostrar, por ejemplo, que el conjunto de los números reales es mayor que el de los racionales, aún siendo ambos infinitos. Es decir, no existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Pues bien, la búsqueda del significado de "continuidad" llevó a **Cantor** a construir el conjunto que lleva su nombre y que es uno de los primeros fractales que se han estudiado. Dicho conjunto se forma tomando una recta, por ejemplo de longitud la unidad, dividiéndola en tres partes iguales y, desechando el tercio central, repetimos esta operación un número infinito de veces y obtendremos un conjunto como se ve en la Fig.2.

Aplicando la teoría de conjuntos es fácil comprobar que dicho conjunto no tiene longitud, o sea: su medida es "cero"; también podemos ver que los puntos adyacentes de cualquier punto del conjunto no pertenecen a él (por haber sido "separados" y desechados) por lo que no es "denso" en parte alguna; es decir, arrojándole un dardo al azar es infinitamente imposible acertar a uno de sus puntos. Pero, por el contrario, en cualquier intervalo de un punto dado (por muy pequeño que sea dicho intervalo) podremos encontrar "incontables" puntos que también pertenecen al conjunto, lo que nos lleva a afirmar que es un conjunto "cerrado" porque contiene a todos sus puntos de acumulación (o puntos "límite"); es más, todos sus puntos son de acumulación. De aquí que podamos afirmar, en sentido topológico, que el conjunto de Cantor es un conjunto perfecto.

Si observamos el conjunto de **Cantor** (Fig.2) vemos que, en cada paso que damos, aparecen dos nuevos conjuntos idénticos al del paso anterior, con una escala reductora de un tercio. Por ello concluimos que es un fractal. Como dijimos al principio, posee la cualidad de autosemejanza a cualquier escala.

DIMENSIÓN FRACTAL

Ya en los albores del siglo XX, buscando una definición válida para el concepto matemático de *"dimensión"* y trabajando con el concepto de correspondencia biunívoca, el italiano **Peano** descubrió una curva ideal capaz de rellenar completamente un plano, es decir de asignar a cada punto de la curva uno y solo uno del plano sin dejar punto alguno del mismo sin asignación (**Fig.3**). Esta curva dio origen a una situación incómoda, ya que la bidimensionalidad del plano se podría apoyar en una curva lineal (conjunto) de puntos. De ello se concluyó que el concepto de dimensión no tenía un sentido topológico, recordando que la Topología matemática

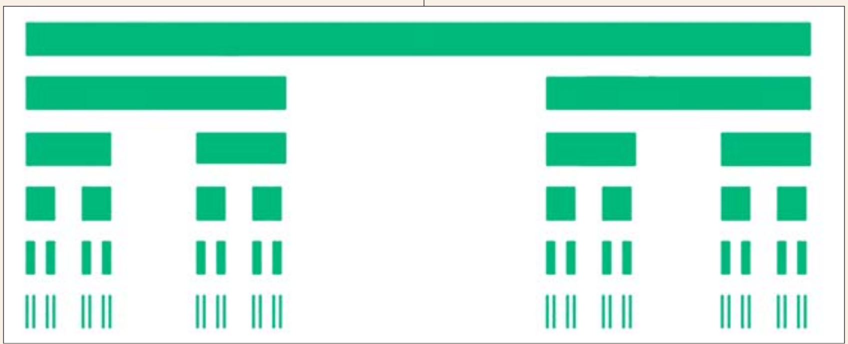


Fig. 2 - Conjunto de Cantor

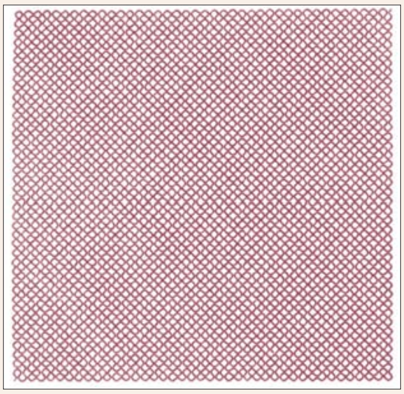


Fig. 3 - Curva de Peano

es la ciencia que estudia las propiedades geométricas y relaciones espaciales que permanecen invariables ante aplicaciones de deformación tales como curvado, escalado, retorcimiento, etc. Pronto, **Brouwer**, en 1911, probó que tal curva no era posible, que la dimensión es una invariante topológica que no puede ser alterada mediante deformaciones.

En esta misma línea de razonamiento **Félix Hausdorff** pudo ampliar el concepto de dimensionalidad, asignando dimensiones fraccionarias a las figuras o formas más complicadas que los simples objetos euclidianos. Con ello, llegamos a la intrigante posibilidad de encontrar objetos de dimensión 1,5 por ejemplo.

La pregunta, entonces, es: *¿cómo puede haber algo de una dimensión intermedia?* La respuesta válida es: *Siendo un fractal.*

Para explicarlo, volvamos al concepto de autosemejanza. Esta propiedad del conjunto de Cantor no está presente con frecuencia en las figuras geométricas clásicas. Un arco de círculo o un lado de un triángulo no son semejantes a su figura original. Sin embargo, en la Naturaleza esta característica se encuentra frecuentemente. Las nubes, los árboles, las montañas, o incluso el cerebro humano, considerados en sus partes presentan dicha semejanza, se pueden obtener series interminables de sí mismos que se repiten a cualquier escala. En la Matemática moderna, estas figuras tan complejas se denominan "patológicas". Antes de volver al concepto de dimensión, veamos una de estas figuras patológicas: la curva de **Von Koch** (Fig. 4), definida por este matemático en 1904, como el límite de la curva que se obtiene por aplicaciones sucesivas a un segmento dado (iniciador) de un doblez (generador) en una secuencia interminable. La curva resultante tiene una longitud infinita a pesar de estar contenida en un área finita. En ninguno de sus puntos es derivable (no tiene tangente), sin embargo, y aunque se denomine patológica, es una curva que sirve de modelo a muchas realidades de nuestro mundo, por ejemplo, a las líneas de las costas marinas o a las arterias del cuerpo humano. Una variante de esta curva se obtiene partiendo de un triángulo equilátero como iniciador, al que aplicando el mismo generador se obtiene la estructura de copo de nieve de **Von Koch** (Fig. 5).

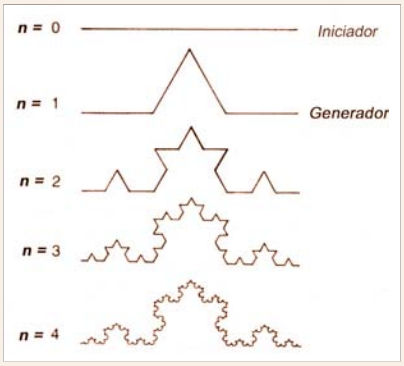


Fig. 4 - Curva de Koch

Para simplificar la explicación del concepto de dimensión desarrollado por **Hausdorff** consideremos un segmento lineal. Si lo dividimos en dos partes iguales, obtendremos dos segmentos semejantes al original, de tamaño la mitad; si lo dividiésemos en tres partes, obtendríamos segmentos de tamaño un tercio del original y así sucesivamente. Con un cuadrado, las divisiones podrían ser: cuatro, nueve, dieciséis, etc. nuevos cuadrados con tamaños: un cuarto, un octavo, un dieciseisavo, etc. del original. Igualmente con un cubo las divisiones y reducciones serían en cantidades: 1; 8; 27: 84, etc.

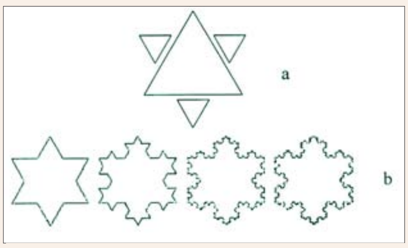


*Fig. 5 - Copo de nieve (b). Generado de (a) un triádico de **Von Koch** en cuatro alteraciones sucesivas*

De aquí, podemos resumir estas autosemejanzas en forma exponencial de la siguiente forma:

Segmento: $1^1(1)$: $2^1(2)$: $3^1(3)$: $4^1(4)$:...

Cuadrado: $1^2(1)$: $2^2(4)$: $3^2(9)$: $4^2(16)$:...

Cubo: $1^3(1)$: $2^3(8)$: $3^3(27)$: $4^3(64)$:...

Por definición, podemos asignar en cada figura el número de la dimensión igual al exponente constante que aparece en cada una de sus posibles divisiones autosemejantes. Para un punto podíamos abstraernos y considerar que su dimensión es cero, condición que cumple la misma regla que el resto de las figuras consideradas. Generalizando, podemos definir la dimensión de un objeto por la relación:

Dimensión (D) = logC/logT

Donde C es la cantidad de copias de sí mismo que contiene el objeto y T es el tamaño relativo de escala resultante para cada una de ellas. Los casos anteriores quedan:

Segmento: D=1; Cuadrado: D=2; Cubo: D=3.

El conjunto de **Cantor** contiene dos copias de sí mismo de tamaño 1:3, su dimensión es D= log2/log3 que equivale a D=0,63 aprox.. Dimensión superior a la de un punto (D=0) e inferior a la de un segmento lineal (D=1).

La curva de **Koch** contiene cuatro copias de sí misma de tamaño 1:3, su dimensión es D= log4/log3 que equivale a D=1,26 aproximadamente. Dimensión intermedia entre la del segmento y el cuadrado.

Si, por ejemplo, en el conjunto de Cantor disminuimos la parte eliminada de la recta, la dimensión aumenta tendiendo a D=1. De esta manera, podemos interpretar la dimensión fractal como el grado de distribución e irregularidad espacial de un objeto acotado por dos dimensiones euclídeas. Para ilustrar esta afirmación, la Fig.6 muestra diversas construcciones geométricas con su dimensión

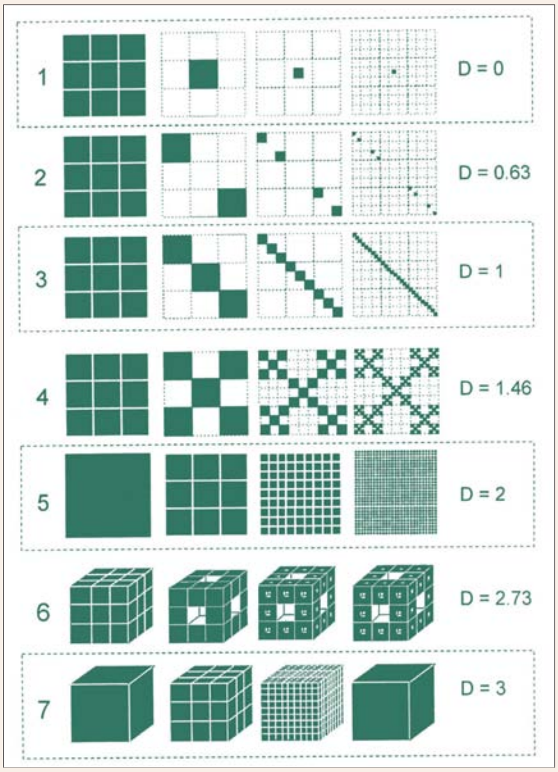


Fig. 6 - Dimensiones fractales a partir de generadores de ***Cantor****. 1: Punto; 2:* ***Cantor****; 3: Recta; 4: Alfombra de* ***Sierpinsky****; 5: Plano 6: Esponja de* ***Menguer****; 7: Cubo*

fractal asociada. Continuando por este camino, no es difícil concluir que la dimensión fractal presenta el acotamiento de ser inferior a su dimensión euclídea (D_E) y superior a su dimensión topológica (d_T), representado por la siguiente desigualdad:

$$d_T \ \Omega\ D_F \ \Omega\ DE$$

En 1919, **Hausdorff** amplió el concepto de dimensión fractal a todas las figuras complejas, aunque no fuesen exactamente autosemejantes, pero comprendidas en el concepto ya mencionado de *no derivables.* Como curiosidad podemos indicar que la línea de la costa británica tiene una dimensión fractal de 1,26 aprox. próxima al valor de la curva de **Koch** y ligeramente inferior a la del contorno de una nube típica, que se encuentra alrededor de 1,35.

Para este tipo de figuras complejas, la dimensión se generaliza como el límite del cociente formado por el logaritmo del número de piezas elementales (cuadrados, cubos, etc.) necesarios para cubrir dicha figura, dividido por el logaritmo del inverso del tamaño de la pieza elemental citada, cuando dicho tamaño tiende a cero. Esta herramienta la puso **Mandelbrot** en práctica con gran visión pues es ideal para describir las irregularidades de la Naturaleza.

Una práctica muy extendida de realizar este cálculo dimensional de una curva es el método denominado *"box-counting"*, que, pese a su nombre en inglés, no es otro que el clásico de cubrir la curva con un entramado de cuadrados y contar los que son atravesados por ella reiterando el proceso con cuadrados cada vez más pequeños. En el límite, para una curva fractal, su dimensión será la razón entre la variación del número de cuadrados que la cubren por el de su tamaño relativo. Como ejemplo, se incluye la Fig.7 con un conjunto de **Julia**.

En el caso de una línea recta, vemos que, disminuyendo el tamaño de la trama a la mitad, el número de cuadrados que la cubren es el doble, es decir:

$$D = \log(2n/n)/\log(2) = 1$$

Mientras que, para una curva fractal, hemos visto que su valor (Fig.7) es superior a la unidad. Sin embargo, una figura de dos dimensiones requiere en cada paso cuadruplicar el número de cuadrados que la cubren.

LOS PRIMEROS FRACTALES

Mandelbrot se interesó por un trabajo publicado en 1961 por **Lewis Richardson** titulado *"How long is the coastline of Britain?"* en el cual se concluía que dicha longitud *"no estaba bien definida"*. Para llegar a ello no hay más que considerar que dicho valor depende de la "vara de medir", es decir si se toma un determinado plano de la isla y se obtiene una longitud de la costa, cada vez que tomemos un plano de la misma a una escala con mayor detalle nos encontraremos que dicha longitud aumenta; si llegásemos a recorrer la costa en un vehículo, obtendríamos un valor superior y si, en el límite, bajásemos a medirla recorriéndola a pie y quisiéramos perfilar hasta el último grano de arena de las orillas, veríamos que los valores en vez de converger, crecen, hasta el punto de que la longitud tiende a ser infinita. En otras palabras, la línea de esta costa y la de cualquier otra formación geológica, es un fractal.

Así es como **Mandelbrot**, representando en una gráfica logarítmica, los diferentes resultados obtenidos y el tamaño de la regla (escala) dedujo que la costa británica tiene una dimensión fractal de 1,26. Lo que viene a contestar la pregunta de **Richardson**, reformulada de la siguiente manera: ¿Cuán retorcida es la costa británica? con su dimensión fractal.

El matemático **Sierpinsky** introdujo en 1916 otro fractal, que, por cierto, viene siendo utilizado por los artistas (escultores y pintores) desde hace varios milenios. Se trata de las denominadas *"gaskets"* o *"Alfombrillas de Sierpinsky"*. Para su obtención tomemos como iniciador un triángulo equilátero completamente relleno de color. Apliquemos como generador, la separación del triángulo interior que se obtiene al dividir el original en cuatro triángulos iguales. Quedando un agujero en el centro y tres triángulos de tamaño cada uno de ellos igual a la mitad del original. Repitiendo es-

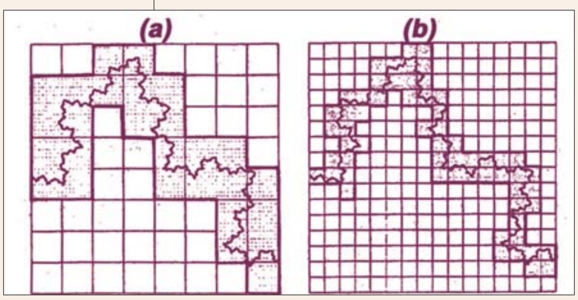


Fig. 7 - Conjunto de ***Julia*** *(parcial) En (a) 27 cuadrados hy en (b) 60 (dobles) Dimensión fractal=log (60/27)/log2=1,152*

te proceso indefinidamente a todos los triángulos que van resultando obtenemos dicho conjunto. Si realizamos operaciones similares partiendo de cuadrados, o de cualquier otro polígono, obtenemos una serie de conjuntos con tipos de plantillas del mismo estilo (Figs. 6 y 8).

Siguiendo el mismo criterio, aplicando generadores circulares a círculos iniciales, como, por ejemplo, retirando tres círculos tangentes entre sí e inscritos en un círculo iniciador, obtenemos unas figuras fractales iguales a ciertas representaciones del arte celta. Lo mismo podemos aplicar a figuras de tres dimensiones y obtenemos pirámides tetraédricas o *"Cubos de Sierpinsky"*. Ahora, es curioso que siendo las figuras de Sierpinsky un producto de la mente, un ejercicio de Matemática pura, nos encontramos conjuntos muy similares en las conchas marinas, y es que frecuentemente, como resultado de la evolución celular, emergen figuras fractales.

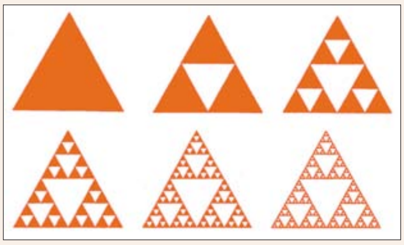


Fig. 8 - Triángulo (alfombrilla) de ***Sierpinsky****. Cada vez se compone de tres copias del mismo, de tamaño 1/2 del anterior*

Una forma muy curiosa de generar un fractal es mediante un juego que proponemos a continuación a los lectores interesados (por lo menos a los que han sido capaces de leer hasta aquí). Sobre un papel en blanco sitúen tres puntos (sean 1, 2, 3) como los vértices de un triángulo equilátero sin unirlos entre sí. Tomen ahora un cuarto punto (4) al azar en el interior de dicho triángulo. Teniendo presente que los puntos que vayamos obteniendo nunca se han de unir entre sí mediante líneas, únicamente nos limitaremos a marcar los puntos de forma visible, procedamos de la forma siguiente: Arrojemos un dado sobre la mesa. Si sale un 1 o un 2, dibujamos otro punto (5) en el punto medio del segmento (virtual) 4-1 formado por el punto inicial (4) y el vértice (1). Si la cara del dado muestra un 3 o un 4, dibujamos el punto (5) en el punto medio del 4-2. Si, por último, saliese un 5 o un 6, el punto (5) lo dibujaríamos en el punto medio del segmento virtual 4-3.

Tomando ahora el nuevo punto (5) como el de partida, volvemos a arrojar el dado y repetimos la misma regla al segmento 5-1; 5-2 ó 5-3, según corresponda, obteniendo un nuevo punto (6). Continuando con la misma regla, al cabo de un rato nos sorprenderá comprobar que se está formando una figura familiar: un *Triángulo de Sierpinsky*, tal como en la Fig.8. Evidentemente, una vez elegido el punto inicial, el futuro del juego está decidido. Pero más sorprendente aún, si se eligen diferentes puntos, podríamos generar la figura de un helecho, un ramillete o una concha (Fig.9) porque, en definitiva, cada figura puede ser codificada mediante una fórmula fractal (o generador) similar a la regla del juego anterior. Lo que es menos obvio es que, al avanzar en el desarrollo de estos conjuntos, la decisión inicial no ejerce una influencia apreciable en el resultado final. Lo que ocurre es que los puntos se van desplazando hacia lo que se llama una *"zona de atracción"*.

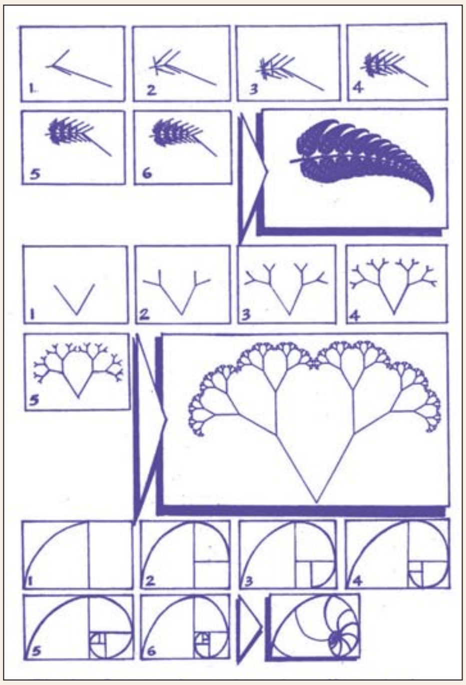


Fig. 9 - Generaciones iterativas (fractales)

También, como curiosidad, destacamos el descubrimiento del *Triángulo de Sierpinsky* en el interior del *Triángulo de Pascal*, utilizado desde las culturas de la antigüedad. Recordemos que en la potencia de binomios, o en combinatoria, dicho triángulo estaba presente. Pues bien, si tomamos un *Triángulo de Pascal* suficientemente grande y coloreamos de negro todos los números impares, nos encontramos nuevamente el *Triángulo de Sierpinsky*. (Fig.10).

LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Profundizando en la teoría de **Malthus** sobre el modelo de evolución de la población de las especies, el matemático belga **Verhulst**, a mediados del siglo XIX, dio un gran paso hacia delante al introducir la posibilidad de la evolución negativa, asumiendo que la población de cada año es una función simple de la población del año anterior.

$$X = rx(1-x)$$

Donde "x" es la población de un año dado y "X" la del siguiente, siendo "r" una constante que depende y puede ser ajustada al modelo de población considerado.

Evidentemente, en el siglo XIX

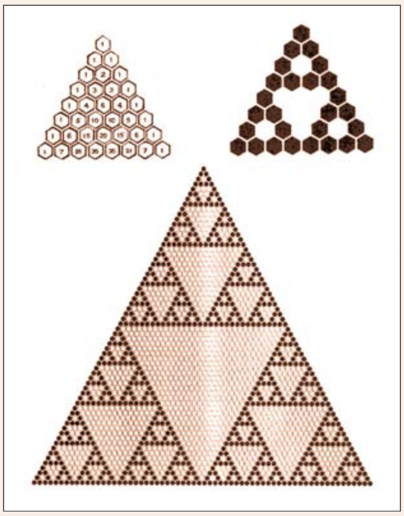


Fig. 10 - El Triángulo de Pascal se convierte en un Triángulo de Sierpinsky al ennegrecer los números impares y eliminar los pares

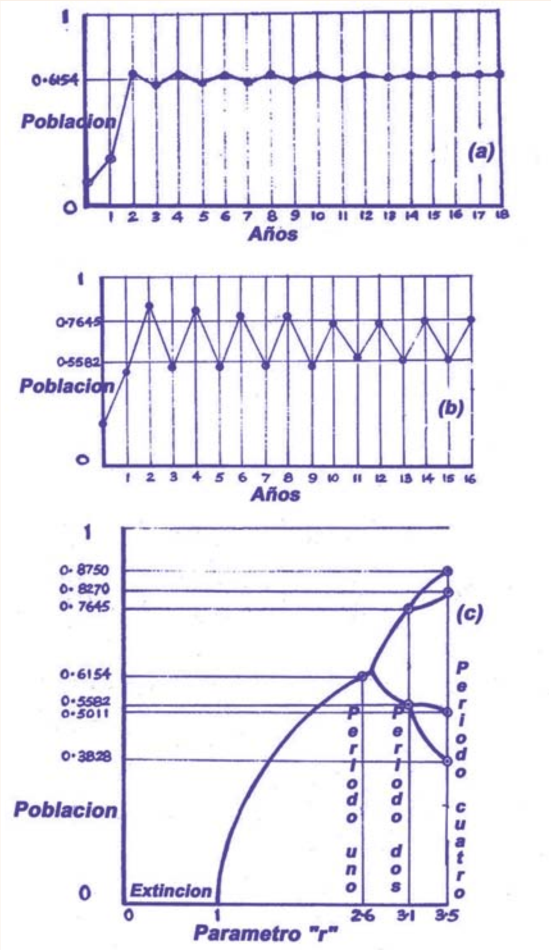


Fig. 11 - Evolución de la población en función del parámetro "r" para X = rx(1-x)

trabajar, a mano, con ecuaciones iterativas de este tipo era prácticamente imposible. Pero en la década de los 1970s dicha fórmula fue un descubrimiento maravilloso para arrancar con la nueva ciencia que se acabaría llamando la *Teoría del Caos.*

Así, en dicha década, el ecologista **Robert May** trabajando con la fórmula de **Verhulst** comenzó tomando una población de peces, siendo "0" el valor de su extinción y "1" el de máxima población. Suponiendo que en un año determinado el valor de X = 0,2 y considerando un valor arbitrario para r = 2,6, la población en los años siguientes sería:

X_1 = 2,6x0,2(1-0,2) = 0,416 (crece)

X_2 = 2,6x0,416 (1-0,416) = 0,6317(crece)

X_3 = 0,6049 (decrece)

X_4 = 0,6214 (crece)

X_5 = 0,6117 (decrece) y sucesivamente:

0,6176; 0,6141: 0,6162; 0,6150; 0,6156; 0,6152; 0,6155; 0;6153; 0,6154; 0,6153; 0,6154; 0,6154; 0,6154...

Es decir, la población, después de unos altibajos convergentes, se estabiliza en 0,6154. Este valor final se dice que es un punto de *atracción* del sistema, el cual, a su vez, está en *equilibrio estable.* (Fig.11a).

Pero **May** observó que, aumentando la sensibilidad del sistema, éste "oscilaba" Comenzando como antes con x = 0,2, pero con r = 3,1 la serie se quedaba sucesiva y permanentemente oscilando en dos valores, éstos eran: 0,5582 y 0,7645. (Fig.11b).

Pero, más curioso aún: si, en vez de tomar r = 3,1, tomaba r = 3,5, la serie se quedaba sucesiva y permanentemente oscilando en cuatro valores: 0,8270; 0,5011; 0,8750 y 0,3828. (Fig.11c).

Es decir, aumentando la respuesta del sistema, el ciclo de vida se va ampliando a ciclos de ocho, dieciséis, treinta y dos, etc. puntos de atracción.

LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LA TEORÍA DEL CAOS

La iteración del ejemplo anterior presenta bifucarciones, cada vez más próximas, hasta que se acumulan en un punto denominado de **Feigenbaum**. En este punto el sistema converge hacia un ciclo infinito que nunca se repite, denominado una *órbita caótica*. La representación gráfica vemos que se asemeja a las ramificaciones de un árbol que se van repitiendo cada vez a menos escala.

Cada vez que se desdobla una rama aparece el denominado período doble en cascada, el cual conduce finalmente al caos. Pero, dentro de este caos, aparecen *ventanas de orden* en forma de períodos estables. En la teoría del caos se ve que la mayor de estas ventanas representa un ciclo de *"período tres".*

En 1975 los matemáticos **Tien Vien Li** y **James Yorke** publicaron un tratado con el título de *"El Período tres implica caos"* utilizando por primera vez estos conceptos bajo un enfoque matemático, creando así la nueva ciencia denominada *Teoría del Caos.*

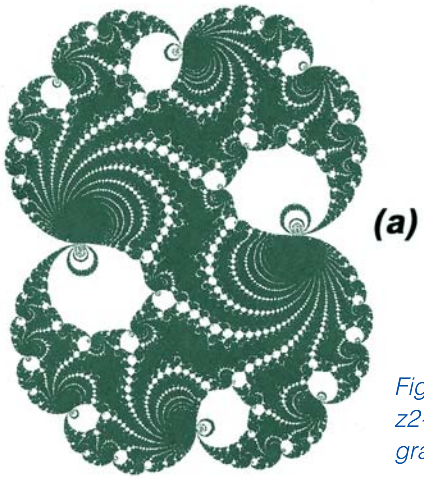
Prosiguiendo con los temas de iteración y bifurcación, **Feigenbaum** determinó en 1977 que la relación de distancias entre bifurcaciones sucesivas convergía a una constante (tan universal como el número p) cuyo valor es 4,669201660910... Valor que ha sido comprobado en simulaciones, en numerosos experimentos de laboratorio y en el mundo real.

CONJUNTOS DE JULIA

En los años de la I Guerra Mundial, **Gaston Julia**, estudiando la transformación del plano de los números complejos, encontró que en las series de iteración, igual que se presentaban puntos (segmentos, áreas, etc.) de atracción, también había casos en que se presentaban áreas de repulsión. Precisamente son las divisorias entre las zonas de atracción. Es como la lluvia que cae en una curva de máximo nivel. Estas fronteras (realmente complicadas formando "dendritas") se denominan *Conjuntos de Julia.*

Estando ya **Mandelbrot** trabajando en Nueva York, en **IBM**, le encargaron un estudio predictivo de la información que se perdía y errores que aparecían en la transferencia de datos entre ordenadores. Sus cálculos le revelaron que el conjunto de dichos errores era un fractal con niveles de autosemejanza iguales a los del conjunto de **Cantor** y comenzó a descubrir las *"ventanas de orden"* que encerraba ese caos. La solución para IBM fue introducir un nivel de redundancia suficiente para cancelar las interferencias.

Mandelbrot se interesó por el *Conjunto de Julia* resumido en la transformación Z = z^2 + c, cuya fórmula permite transformar cualquier número complejo en otro, es decir re-



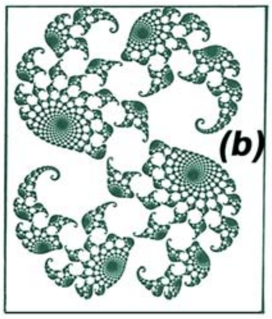


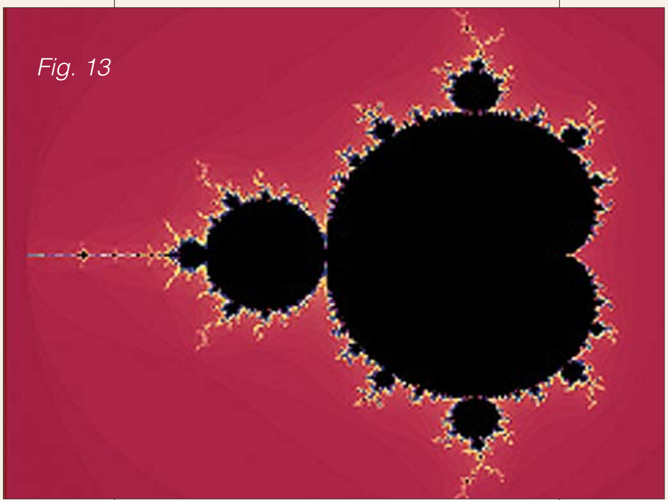
Fig. 12 - Conjuntos de ***Julia****; Z = z2+c, para “c” suficientemente grande. (a)=conexo; (b)=inconexo*

presentar el plano complejo en sí mismo, produciendo un efecto de retorcimiento y estiramiento.

El dibujo (fractal) resultante de estos conjuntos depende del valor de la constante “c”. Si es pequeño, aparecen círculos retorcidos, pero al ir aumentando aparecen puntos discretos esparcidos en forma de polvo formando figuras que **Mandelbrot** bautizó con el nombre de *“Dragones al cuadrado”.*

Hay dos variedades de *Conjuntos de Julia:* conexos y disconexos o separados. Estos son topológicamente iguales al conjunto de *Cantor* y los conexos consisten en sucesiones de líneas formando curvas, lazos y a veces, dendritas. (Fig.12).

Fig. 13

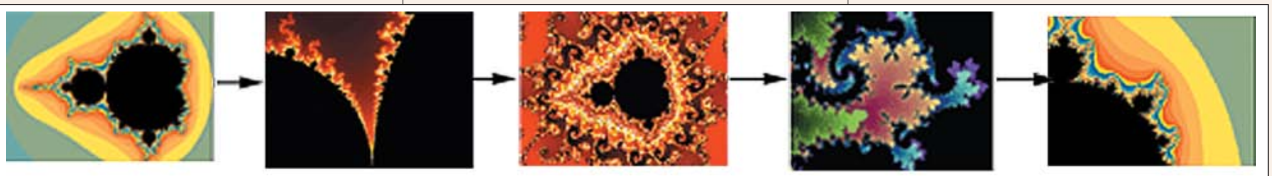


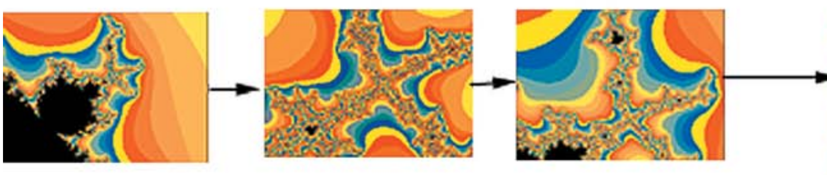
EL CONJUNTO DE MANDELBROT

En 1980, **Mandelbrot** pensó realizar la representación gráfica de los Conjuntos de Julia en el plano de los números complejos. Para ello, si el valor de la constante “c” daba un conjunto conexo, marcaba un punto negro en el plano; en caso contrario, se desechaba. A primera vista parece algo complicado, pero **Julia** ya había encontrado la forma de averiguar si un conjunto es conexo sin tener que desarrollarlo, basta con examinar la órbita del punto origen, si se dirige al infinito el conjunto es disconexo, lo cual con ayuda de un ordenador se realiza aplicando un programa muy sencillo.

La reacción del equipo de investigación de Mandelbrot en la **Universidad de Harvard**, cuando obtuvieron la primera impresión gráfica fue la de que algo había fallado en el programa. La figura resultante no era la esperada y era rarísima. (Fig.13).

Pero esto no fue lo más sorprendente. Introduciendo nuevas coordenadas iban obteniendo sucesivas y más profundas vistas en detalle (*zoom*) que replicaban el modelo original, tanto del conjunto, como de cualquier ramificación, por pequeña que fuere. Entrando en mayor detalle, el matemático chino **Tan Lei** ha probado que los modelos de los Conjuntos de Julia se encuentran en los bordes del de Mandelbrot. (Fig.14). Ahora bien, este conjunto es tan complicado que ni siquiera con ayuda del ordenador se puede determinar si un punto dado pertenece a él o no.. En 1991, **Mitsuhiro Shishikura** demostró que los bordes del conjunto de





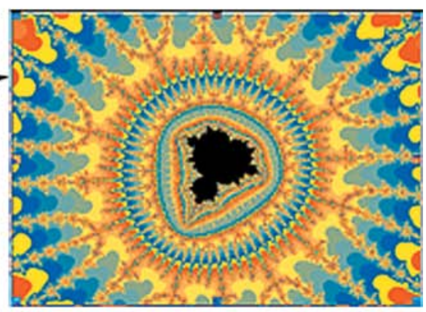


Fig. 14 - Ampliaciones sucesivas del conjunto de Mandelbrot pasan por conjuntos de Julia y vuelven a Mandelbrot indefinidamente

Mandelbrot tienen una dimensión fractal de 2. Pero no se conoce, hasta el momento, su área exacta. Se sabe que está en torno a 1,50659177... obtenida por el método de *box counting* mencionado anteriormente.

FRACTALES EN EL MUNDO REAL

Como la intención de este artículo es dar una breve introducción, creemos que es obligado detenernos aquí y dejar paso expedito a quien desee continuar aprovechando la gran disponibilidad de información que nos pone la red de Internet a nuestra disposición. Basta con acudir a cualesquiera de los nombres o conceptos que hemos subrayado más arriba para comenzar a profundizar en estos temas. Por supuesto, la literatura disponible en librerías técnicas y bibliotecas universitarias es la vía obligada para avanzar a fondo por el camino de esta nueva Ciencia.

Antes de llegar la Geometría fractal, no disponíamos de herramientas capaces de describir los aspectos de la vida que nos rodea. Para comprender la universalidad y aplicación tan exhaustiva de esta Ciencia, pasamos finalmente a citar varios ejemplos de fractales:

En Física, los estudios recientes de la interacción molecular en el cambio de fase realizados por los alemanes **Heinz-Otto Peitgen** y **Peter Richter** han descubierto una familia de fractales con características similares a las de los spin magnéticos en las transiciones de fase o de los bloques elementales fracturados para los modelos de percolación.

En la Naturaleza, los perfiles y grietas de un macizo montañoso presentan autosemejanza fractal. Igual que un bosque de helechos o el delta de un gran río. Las nubes se forman por condensación de gotas de agua en base aleatoria, pero, una vez que comienza su formación, nuevas gotas son atraídas, creando las condiciones necesarias para un fractal. Se ha comprobado que la propagación de un incendio forestal en una plantación ordenada de árboles sigue una conducta fractal. Algo parecido ocurre con la extensión a las personas afectadas de una epidemia infecciosa.

Durante el zincado o galvanizado de superficies, se produce una distribución idéntica al crecimiento de los corales marinos, con una dimensión fractal del orden de 1,7. Es un fenómeno parecido al crecimiento de los árboles mediante ramificaciones originadas desde su interior, por cierto, proceso similar al de la formación de los copos de nieve.

El movimiento browniano de una partícula sometida al bombardeo incesante de millones de pequeñísimas partículas de aire, recorre un camino fractal de dimensión próxima a 2. Algo muy parecido al comportamiento de las partículas subatómicas.

En Geología, el estudio de fallas, la morfología fluvial (deltas, canales, etc.), la Topografía terrestre, análisis de terremotos y Sismotectónica, etc. se están abriendo camino por modelos fractales que ayudan al avance en investigaciones hasta ahora problemáticas.

La tecnología fractal está aportando avances en procesos donde la tensión molecular y la maleabilidad de los materiales son importantes. Modelizando la estructura fractal de las moléculas de los cables de acero se ha reducido el tiempo de prueba de una bobina que duraba tres días a tres minutos. Las industrias de joyería o de fibra óptica utilizando fibras fractales (fibras de fibras) aumentan y mejoran sus propiedades considerablemente.

Existen modelos estadísticos de Geometría fractal para el análisis de resistencias en estructuras complejas, o de propagación de la corrosión o también para estudiar el comportamiento de aeronaves frente a turbulencias formadas por fuertes ráfagas variables de viento.

En el terreno militar, la Geometría fractal ha demostrado su utilidad en la detección de almacenamientos bajo el agua o en la trazabilidad del movimiento de submarinos, como en análisis medioambiental para la determinación del origen y ruta seguida por nubes de lluvia ácida.

Aplicaciones de Geometría fractal en Astronomía están presentes en todos sus frentes. La estructura del Universo desde la teoría de distribución de la luz en el espacio, hasta el descubrimiento del cúmulo de galaxias próximas entre sí que forman la llamada Gran Muralla. La Geometría real del Universo tridimensional es como una gran espuma en la que la materia (estrellas, planetas y resto de cuerpos estelares) se encuentra en las burbujas de la espuma. Entre las nubes galácticas no hay nada en absoluto. Pues bien, los astrónomos utilizando fractales actualmente obtienen modelos de la estructura y evolución (incluso del destino) de las nubes de polvo interestelar.

El gran tema de saber si el Universo es abierto, cerrado o plano, es decir, si la expansión actual llegará a invertirse o a estabilizarse, es un fractal con escalas de hasta 100 millones de años luz y una dimensión comprendida entre 1 y 2, en función de la relación entre la densidad de masa cósmica observada y la densidad crítica. Ahondando en esta área se está intentando avanzar en la todavía cuestionada teoría del *Big Ban*g. El Premio Nobel, **Hannes Alfvén**, creador de la *Teoría del Plasma* en Cosmología, en su versión de la teoría inflaccionaria del Universo, concluye que su estructura implica que se trata de un fractal autogenerado e interminable, lo que significa que el Universo en su expansión crea otros universos fuera de sí mismo. Esto indica que no sólo la estructura del Universo es un fractal, sino que su evolución también lo es. Lo que da lugar a una reacción en cadena, en cuyo caso podemos afirmar que la evolución, a cualquier escala, no tiene fin.

También podemos encontrar fractales en diferentes facetas del Arte. Ampliando los bordes del Conjunto de **Mandelbrot** encontramos figuras iguales a los *mandalas* o dibujos budistas introductorios a la meditación. Igualmente se encuentran en las artes islámicas, celtas, egipcias o aztecas. En la pintura abstracta encontramos obras de **Dalí**, **Escher** o **Pollock** con auténticos diseños fractales. En los sonidos y en la música podemos encontrar distribuciones de frecuencias fractales, desde el ruido de una catarata o el golpeteo de las olas del mar al canto de un pájaro o a una obra de

Bach (o de los *Beatles*). En Arquitectura podemos observar la *Sagrada Familia* de **Gaudí**, o los detalles filigranísticos del barroco como verdaderos fractales. Las catedrales góticas son buenos ejemplos de visión intuitiva fractal.

Por último, nosotros somos fractales. Nuestros pulmones, el sistema sanguíneo, el cerebro, tienen estructuras fractales. Se ajustan a la propiedad de autosemejanza en los cambios de escala. Los pulmones con una superficie cerrada poseen curvas de longitud infinita con grandes grupos de perfiles curvos con exactamente los mismos límites. Así es como maximizan los pulmones su superficie de intercambio. Por ejemplo, los bronquios en sus siete primeras ramificaciones tienen una dimensión fractal diferente a la dimensión de las ramificaciones de mayor nivel. Recordemos que la superficie pulmonar puede cubrir una pista de tenis, mientras que su volumen casi cabe en una pelota de tenis.

La labor empírica que venían desarrollando los fisiólogos acerca de la cantidad de sangre que circula en el cuerpo humano en relación con el tamaño de las venas que la conducen, ha sido revisada por Geometría fractal revelando que dicha relación cumple la ley de las afinidades o del “exponente _”, es decir el cubo de la raíz cuarta. Pensemos que nuestras arterias que ocupan aproximadamente sólo el 3% del volumen del cuerpo, son capaces de llegar a todas las células de nuestro organismo para suministrar los nutrientes necesarios utilizando la menor cantidad posible de sangre y todo el proceso transcurriendo a través de interfases comunes en contacto físico.

El cerebro humano es el órgano conocido más importante del planeta. Simplemente viéndole, se comprende que su estructura es fractal. Si bien es irónico que, siendo capaz de haber deducido las reglas que rigen el Universo, no ha sido capaz de descubrir por las que se rige él mismo. Este entendimiento es el mayor reto que enfrenta actualmente la Humanidad; pues bien, la Geometría fractal está presente y liderando los trabajos de investigación que se están llevando a cabo en este campo.

la palabra fractal engloba las geometrías y conjuntos matemáticos que presentan invarianza al cambio de escala

En Medicina, los fractales se usan habitualmente. Los complejos vitamínicos, los anticuerpos tratando de anular la acción sobre la superficie de las células, las técnicas de posicionamiento de los virus y bacterias cuando invaden y atacan la química del cuerpo, lo hacen por medio de reglas determinísticas de Geometría fractal. En los estudios de casos particulares tales como el cáncer, el SIDA o las degeneraciones óseas, la Geometría fractal es imprescindible y está aportando importantes avances.

En morfogénesis, Ciencia que estudia el desarrollo de los seres vivos, se están dando buenos avances aplicando transformaciones afines que permiten acumular bases de datos complejas y simular escenarios naturales del paso de una especie a otras similares. Así, hoy se recrean esas imágenes que vemos en TV sobre evolución de especies, con altos grados de fidelidad.

Pasando de la persona al grupo, diremos que también se están desarrollando modelos fractales para el estudio del comportamiento de las masas. Cuando estamos en grandes grupos nos comportamos como bandadas de pájaros o bancos de peces, es decir, como una macro unidad. Los desplazamientos en la entrada o salida de un estadio, independientemente de la libertad de movimiento de cada ser en particular, siguen el comportamiento similar al de un organismo único.

Hablando de curvas autosemejantes, seguro que alguno ya ha pensado en las curvas estadísticas de los mercados de valores. Pues acertó. Terminaremos hablando de dinero, algo agradable, ¿por qué no? Los fractales en Economía tienen una importancia similar a la que venimos mencionando en otros campos del saber. **Mandelbrot** publicó en 1998 un libro titulado *“Fractal and Scaling in Finance Discontinuity, Concentration, Risk”* que puso en pie a Wall Street. Ocurre, que si nos fijamos en una determinada curva de cotizaciones en un intervalo, vemos que igualmente puede valer para una escala de horas, días o semanas. Entrando a fondo en la cuestión, Mandelbrot pasa en su estudio por el movimiento browniano y *Serpientes de Sierpinsky*, para demostrar que, tomando, por ejemplo de un valor dado, cotizado en Bolsa, una curva de tendencia alcista como origen y aplicando iteradamente un generador en un determinado lapso de tiempo, equivalente a la fluctuación de dicho valor durante una hora, se obtiene una curva de cotización real. La sensibilidad (volatilidad) del valor varía desplazando la aplicación del generador hacia la izquierda o derecha del punto inicialmente considerado. Con esto, estamos hablando de la Teoría de los cambios de escala en una dirección, en este caso la horizontal (tiempo) puesto que la vertical (cotizaciones) permanece invariable. Con ello vemos que estas curvas presentan invarianza al cambio de escala.

Pero lo novedoso reside en el hecho de que su estructura se ajusta a la autoafinidad fractal y a la *Teoría del Caos*. Los errores de las teorías modernas de los *“portfolios”* (cestas de fondos o valores) se deben a la súper-simplificación que toman en sus modelos matemáticos. La belleza de la Geometría fractal es que permite obtener modelos capaces de caracterizar el comportamiento del mercado en momentos de calma, así como en los de turbulencia, condición que desgraciadamente se presenta con demasiada frecuencia. ■