

Optimización global de pórticos 2D con barras de sección variable



Mariano Cacho-Pérez *
Antolín Lorenzana-Ibán *

Ingeniero Industrial
Dr Ingeniero Industrial

* ITAP. Escuela de Ingenierías Industriales. Universidad de Valladolid (UVA). Grupo de Mecánica de Sólidos y Estructuras. Paseo del Cauce 59 - 47011 Valladolid. Tfno: +34 983 423391. cacho@eis.uva.es; ali@eis.uva.es

Recibido: 26/04/2010 • Aceptado: 19/07/2010

Global optimization of 2D frames with variable cross-section beams

ABSTRACT

- The structural design has been one of the first fields of engineering in needing powerful tools for analysis. The methods to assess that the structure agrees with any of the design criteria (strength, stability, vibrations, etc.) are usually implemented in numerical applications that, even under usual simplifications such as constant cross-section or linearization, are computationally very demanding. Nevertheless, with the current capacities both of analysis and of manufacturing and the use of new materials, it is possible to propose problems like the ones shown in this work, where the variation of the dimensions of the cross-section of the beams of any 2D frame is determined so that its strength to buckle is maximum. Classic solutions exist for isolated beams, in some cases even analytical solutions. But for structures built of several beams, the problem is more complex and numerical solutions are compulsory. The new formulation presented in this work can deal with the optimization problem of frames in which the geometrical shape of the profile is found under restrictions such as stability (no buckling), elastic behaviour (equivalent von Mises stress below the yield stress), limited displacements, etc. With these aims, equilibrium equations for each beam are established in its deformed configuration, and using the hypothesis of small displacements and small deformations (Second Order Theory) a system of differential equations of variable coefficients is set. For its solution, numerical techniques as quadratic sequential programming are employed.
- **Keywords:** optimization, critical load and buckling mode, variable cross-section.

RESUMEN

El cálculo y dimensionado de estructuras fue una de las primeras disciplinas en demandar potentes herramientas de cálculo. Los métodos para realizar las necesarias comprobaciones sobre resistencia, estabilidad, vibraciones, etc. son muy exigentes desde el punto de vista computacional y usualmente asumen restrictivas simplificaciones como perfiles de sección constante, linealización de problemas no lineales, etc. Sin embargo, con las capacidades actuales - tanto de cálculo como de fabricación - y el uso de nuevos materiales, junto con ciertos condicionantes estéticos, es posible abordar problemas como el que se presenta en este artículo, donde se busca la variación óptima del canto de las barras de cualquier pórtico de manera que se cumplan cuantos criterios sean exigibles, entre ellos el

de estabilidad, es decir, que no aparezcan fenómenos de pandeo.

Para barras aisladas existen soluciones clásicas, en algunos casos analíticas, para la forma que debe tener una barra comprimida de manera que su resistencia al pandeo sea máxima. Pero para estructuras de barras el problema es más complejo y debe resolverse de forma numérica. En este trabajo se presenta una formulación novedosa para resolver el problema de optimización de pórticos teniendo en cuenta los condicionantes no solo de pandeo, sino cualquier otro, como por ejemplo tensiones admisibles, desplazamientos limitados, etc. Se seleccionan ciertos parámetros de diseño y se formula matemáticamente el problema de optimización para determinar qué valores maximizan la carga de pandeo del pórtico sujeto a las restricciones de diseño

(material, tensiones, desplazamientos, etc.). Para ello, se plantea el equilibrio de cada barra en su configuración deformada, bajo hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones (*Teoría de Segundo Orden*), dando lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes variables que se resuelve numéricamente mediante programación cuadrática secuencial.

Palabras clave: optimización, carga crítica y modo de pandeo, inercia variable.

1. INTRODUCCION

El comportamiento mecánico de elementos comprimidos ha sido una fuente de aportaciones teóricas y de resultados prácticos de gran interés para la ingeniería del que han surgido importantes áreas como la estabilidad estructural. El primer científico que se ocupó de estudiar el comportamiento resistente de un elemento prismático fue **Galileo** en su publicación de 1638, donde trata de obtener algunos resultados sobre la resistencia de una viga sometida a cargas transversales: este problema, y, en particular, el de determinación de la elástica o deformada de la viga, es conocido como el *problema de Galileo*.

Respecto al problema de pandeo, **J. Benoulli** (1705) obtiene de manera precisa la ecuación de la elástica basándose en la *hipótesis de Mariotte* sobre la fibra neutra. **Euler**, en 1744, mediante su método de cálculo de variaciones obtiene, a partir de la sugerencia de D. Bernoulli, formula la ecuación diferencial de la elástica y obtiene también el valor de la carga de pandeo. En 1757, obtiene de nuevo el valor de dicha carga a partir de una simplificación (ecuación linealizada) de la ecuación diferencial de la elástica. En publicaciones posteriores, considera el caso de piezas de sección variable y otros con carga axial distribuida a lo largo de la longitud de la pieza. Al mismo tiempo se profundiza en distintas líneas de trabajo. En 1770, **Lagrange**[20] estudia la ecuación linealizada de Euler e investiga el valor de las cargas de pandeo superiores a la primera para la pieza biarticulada. Así mismo, se propuso hallar la forma que debería tener una columna de altura y volumen dados para que aguantase la máxima compresión posible sin pandear, y establece erróneamente que la mejor forma es un cilindro circular, en otras palabras, que el éntasis no aumenta la resistencia. Posteriormente, **Clausen**, en 1851, determina la pieza óptima frente al pandeo, la forma de columna más estable es aquella donde la variación de la sección circular a lo largo del fuste constituye una curva parecida a una cicloide[22]. En relación con este problema, hay multitud de publicaciones de gran interés. **Keller**[7] y **Tadjbakhsh**[18], derivaron que las formas geométricas óptimas de la pieza más resistente frente al fenómeno de pandeo es una cuya sección varía de la misma forma que la determinada por Clausen, pero, en lugar de secciones circulares, éstas son triángulos equiláteros que mantienen el paralelismo de los lados y con el baricentro en

el eje de la pieza.

El trabajo de Keller ha despertado gran interés en el área. **Taylor**[19] estudió el mismo problema usando un enfoque energético, y presentó un límite inferior para el máximo autovalor. **Spillers** y **Levy**[17] extendieron el problema del pandeo de una columna al del diseño óptimo de una placa frente a inestabilidades por flexión y más tarde al estudio del fenómeno de pérdida de estabilidad de una cubierta cilíndrica simétrica a lo largo de un eje[16]. Sin embargo, un inconveniente con todos estos trabajos es que sus respectivos autores limitaron sus diseños óptimos a sólo una restricción: un volumen constante. En la práctica, sin embargo, las restricciones impuestas por la resistencia del material empleado o por los desplazamientos juegan un papel igualmente importante.

Fu y **Ren**[4] retomaron los trabajos antes mencionados, aunque agregando las restricciones de tensiones necesarias, planteando así el problema de minimizar el volumen de una columna sujeta a una cierta carga mediante el ajuste de su forma geométrica. El método que utilizaron para resolver este problema fue el gradiente reducido generalizado, obteniendo resultados muy favorables.

Existen también referencias muy recientes, que emplean la teoría matemática del análisis funcional para obtener la forma óptima frente a pandeo por torsión y/o flexión a partir de las condiciones que establece el *principio de Pontryagin*, **Atanackovic**[1].

Como se ha podido comprobar, el campo de la optimización estructural ha atraído la atención de un gran número de investigadores desde hace tiempo. Hay numerosas publicaciones recientes[3][6][8][11][14] donde se presentan, en un marco multidisciplinar, distintas técnicas numéricas. Sin embargo, en relación al estudio de fenómenos de inestabilidad, los trabajos en general se limitan al análisis de barras y consideran muy pocas restricciones de diseño, la de volumen y en el mejor de los casos se añade la comprobación a resistencia. Por estos motivos, este trabajo se ha centrado en optimizar pórticos planos, con una función objetivo planteada en términos de estabilidad y, en cuanto a restricciones o condiciones de diseño, se pueden considerar las más habituales: volumen, tensiones y desplazamientos, aunque se puede añadir cualquier otra.

Por último, indicar que el trabajo se ha organizado de la manera siguiente: en primer lugar, tras esta introducción, se presenta el marco teórico para caracterizar el comportamiento no lineal de la barra y calcular la carga crítica y el modo de pandeo. A continuación, se extiende la formulación al análisis de pórticos planos, seguido de una breve descripción del problema y de la estrategia de optimización. En los dos últimos apartados, se presentan los resultados numéricos para varios ejemplos y se resumen las principales conclusiones obtenidas de este trabajo.

2. MODELO DE BARRA

Se parte, como es habitual en Resistencia de Materiales, de las hipótesis básicas de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos y del *modelo de barra de Navier-Bernoulli*, con comportamiento del material de tipo elástico lineal. Así mismo, se adopta un estado proporcional de cargas, de tal manera que todas las acciones sobre la estructura, excepto el peso propio y la temperatura, se incrementan en igual proporción respecto a sus valores nominales, mediante el factor de carga (λ).

En base a estas hipótesis se presentan a continuación las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento para el elemento tipo barra objeto de estudio.

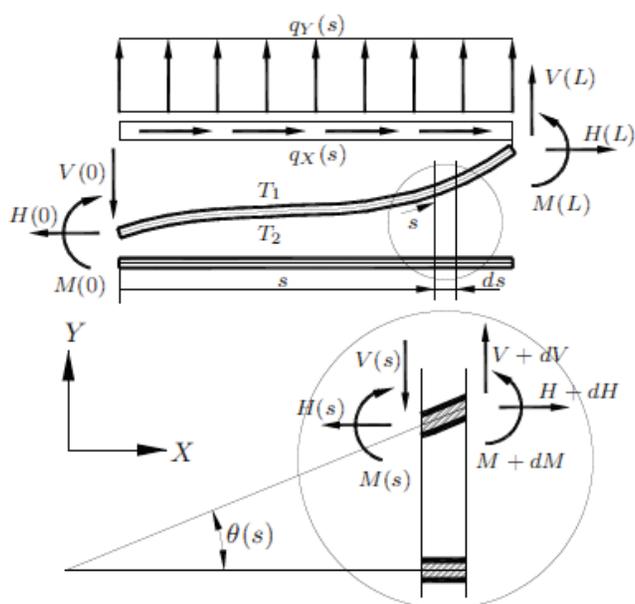


Figura 1: Equilibrio

2.1. COMPORTAMIENTO NO-LINEAL. PREPANDEO

Se considera un sistema de referencia cartesiano de orientación fija para cada barra independiente de su deformación, sistema local de la barra denotado por (X, Y, Z) . Del equilibrio de fuerzas según los ejes (X, Y) y de momentos según Z en la configuración deformada, resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en términos de los pseudo-esfuerzos o esfuerzos de **Piola-Kirchhoff** [9]:

$$\begin{cases} H'(s) + q_X(s) = 0 \\ V'(s) + q_Y(s) = 0 \\ M'(s) - H(s)\theta(s) + V(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las variables primadas indican derivada respecto de la coordenada espacial s , y donde se ha aproximado el seno del ángulo por el ángulo y su coseno por la unidad en base a la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Las ecuaciones que relacionan los esfuerzos anteriormente mencionados con los desplazamientos (u, v, θ) de un punto de la directriz de la barra son:

$$\begin{cases} H(s) = EA(s) \left(u'(s) - \frac{\alpha}{2}(T_1 + T_2) \right) \\ \theta(s) = v'(s) \\ M(s) = EI_z(s) \left(\theta'(s) + \frac{\alpha}{h(s)}(T_1 - T_2) \right) \end{cases} \quad (2)$$

siendo E el *módulo de Young* del material, y $A(s)$ el momento de inercia y el área de cada sección transversal de la barra. Nótese que se incluye el efecto térmico, suponiendo por simplicidad variación lineal de la temperatura en el canto $h(s)$, entre T_1 y T_2 , siendo α el coeficiente de dilatación térmica.

Finalmente, las ecuaciones anteriores, las de equilibrio (1) junto con las ecuaciones de compatibilidad-comportamiento (2), constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables que en general no tiene solución matemática cerrada o explícita. No obstante, se puede calcular la solución numérica para cada caso concreto analizado mediante distintas técnicas de análisis numérico. Conocida la respuesta de cada barra, será necesario solamente exigir compatibilidad y equilibrio entre las barras que constituyen la estructura para determinar la respuesta del conjunto.

2.2. ECUACIONES DE ESTABILIDAD. PANDEO GLOBAL

La solución de las ecuaciones (1) y (2) para unas determinadas condiciones de contorno en general es única. Sin embargo, para el planteamiento de *Teoría de Segundo Orden* adoptado, ciertos valores discretos de las cargas, denominados cargas críticas, podría no ser así. Significa que puede producirse una respuesta distinta de la esperada (solución estable o estado prepandeo), dando lugar a súbitos desplazamientos de amplitud indeterminada. En esta situación la forma de la deformada se conoce como modo de pandeo.

Para determinar la carga crítica, un posible método [15] se basa en introducir una pequeña perturbación del equilibrio. Consiste en suponer un desplazamiento transversal infinitesimal Δu respecto al estado estable. En esta nueva situación se deben seguir cumpliendo las ecuaciones (1) y (2), de tal manera que las magnitudes incrementales en desplazamientos $(\Delta u, \Delta v, \Delta \theta)$ y en esfuerzos $(\Delta H, \Delta V, \Delta M)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones lineales, que se conocen como ecuaciones de estabilidad:

$$\begin{cases} \Delta H'(s) = 0 \\ \Delta V'(s) = 0 \\ \Delta M'(s) - H(s)\Delta\theta(s) - \theta(s)\Delta H(s) + \Delta V(s) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta H(s) = EA(s)\Delta u'(s) \\ \Delta \theta(s) = \Delta v'(s) \\ \Delta M(s) = EI_z(s)\Delta \theta'(s) \end{cases} \quad (4)$$

Estas ecuaciones, junto con las condiciones de contorno asociadas al problema original con cargas exteriores nulas son las que permiten determinar la carga crítica. Desde el punto de vista matemático consiste en obtener los autovalores del problema de frontera definido por dichas ecuaciones (3) y (4).

La deformada del pórtico justo en el instante en el que la carga alcanza el valor crítico resulta indeterminada, y, por lo tanto, para calcular el modo de pandeo asociado, lo que se hace es resolver las ecuaciones de estabilidad (3) y (4) sustituyendo una de las ecuaciones de equilibrio por una condición adicional en desplazamientos, es decir, imponiendo un valor arbitrario para uno de los grados de libertad del pórtico objeto de análisis (de ahí la denominación de modo).

Para ello, y debido a que en las ecuaciones de estabilidad intervienen magnitudes del estado estable o prepandeo, es necesario resolver de forma simultánea las ecuaciones de comportamiento mecánico de cada barra más las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de los nudos, que - junto con las condiciones de contorno - constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales lineal de coeficientes variables cuya solución se puede encontrar mediante técnicas adecuadas. Aunque para algunos casos, autores como Keller[7] presenten soluciones analíticas basadas en el cálculo de variaciones, en el caso general son necesarios algoritmos numéricos como el método del disparo no lineal, diferencias finitas o el *método de Rayleigh-Ritz*[15].

La deformada obtenida de esta manera se puede escalar o normalizar, atendiendo a alguna norma. Se recuerda que para poder conocer la deformada real, y por tanto el comportamiento post-pandeo, es necesario recurrir a modelos matemáticos más complejos, que caen dentro de lo que se conoce como *teoría de "grandes desplazamientos"*.

3. ANÁLISIS DE PÓRTICOS

En la sección anterior se ha indicado el conjunto de ecuaciones que describe el comportamiento no-lineal de la barra aislada. En este apartado se describe el método de análisis que permite determinar la respuesta del conjunto de barras que forma el pórtico objeto de estudio en cada caso concreto. Para ello, se necesitan las condiciones de contorno junto con las relaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos de unión de las distintas barras y las condiciones de compatibilidad en desplazamientos y giros.

A diferencia de los métodos clásicos de análisis, donde en general se recurre a simplificaciones (planteamiento matricial y linealización) y por ello es necesario emplear un alto número de elementos por barra para poder conseguir

la precisión suficiente, en este trabajo se ha empleado un método de análisis directo y no aproximado: de esa manera se consigue una mayor generalidad y un ahorro de cómputo al no requerir mallas finas ni matriz de rigidez alguna.

3.1. EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD

Siempre que se analizan estructuras compuestas por más de una barra, es necesario establecer un sistema de referencia común a todas las barras de la estructura, llamado *Sistema de referencia global* (X_g, Y_g, Z_g). Seguidamente es necesario discretizar la estructura/pórtico, es decir, dividirla en un número adecuado de barras. Debido a la formulación empleada en este trabajo y en base a las hipótesis asumidas, es suficiente con emplear un número de barras coincidente con los tramos rectos entre nudos. Discretizaciones más finas llevan a igual solución final a pesar del mayor esfuerzo computacional.

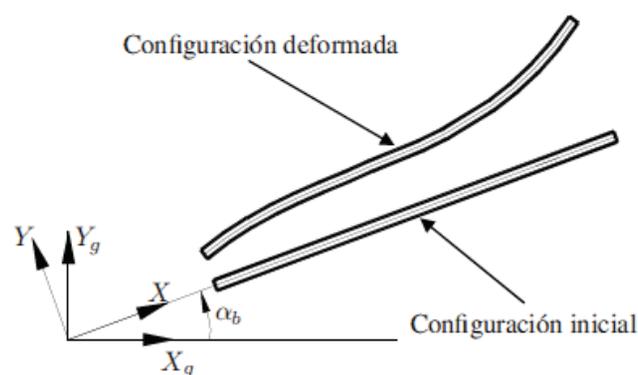


Figura 2: Orientación inicial de la barra

Para pasar las magnitudes monodimensionales de cada barra al sistema de referencia común de toda la estructura, se procede a realizar el correspondiente cambio de base en función de la orientación inicial de las barras, dada por el ángulo mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X_g, Y_g, Z_g)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 \\ \sin \alpha_b & \cos \alpha_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \end{bmatrix}_{(X, Y, Z)} \quad (5)$$

Tras estas operaciones, sólo resta imponer en cada uno de los nudos de la estructura las correspondientes condiciones de compatibilidad de desplazamientos y de equilibrio de fuerzas y momentos. Este proceso, aunque sencillo, es de casuística muy variada dependiendo de las libertades consideradas en cada nudo. En la aplicación informática desarrollada[3][8] en MATLAB®[2][5] se ha conseguido sistematizar para que una vez definidos los datos del problema (geometría, perfiles, materiales, cargas, apoyos, libertades, etc.), se realice de forma automática sin la intervención del usuario.

3.2. CONDICIONES DE CONTORNO

A la vista del orden del sistema de ecuaciones diferenciales (1) y (2), es necesario imponer seis condiciones de contorno por barra en desplazamientos y/o esfuerzos. Como es sabido del *Teorema de unicidad*[21], en cada sección donde se impongan condiciones de contorno, si es conocido el desplazamiento en una determinada dirección, el esfuerzo en esa misma dirección será una incógnita del problema y viceversa.

Para un problema plano, toda la casuística posible relativa a la imposición de condiciones de contorno se puede resumir como sigue, por ejemplo, en el extremo ($s=L$), relativas al sistema de referencia local de la barra, se pueden expresar como:

$$\begin{bmatrix} H(L) \\ V(L) \\ M(L) \end{bmatrix}_{(x_g, y_g, z_g)} = - \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(L) \\ v(L) \\ \theta(L) \end{bmatrix}_{(x_g, y_g, z_g)} \quad (6)$$

Esta representación de las condiciones de contorno, incluye, entre otras, las más habituales: apoyo rígido, extremo libre, apoyos semirrígidos, etc.

El siguiente paso será resolver el conjunto de ecuaciones ((1)-(4)) de todas las barras de la estructura junto con las condiciones de contorno correspondientes para determinar el valor de la carga de pandeo.

4. OPTIMIZACIÓN

El esfuerzo en este trabajo se ha enfocado hacia formular un método numérico que permita dimensionar de forma óptima las dimensiones de la sección transversal en ciertas cotas de las barras que conforman un pórtico. Para ello, entre otras posibilidades, se ha planteado una función objetivo en términos del factor de carga crítico, sujeta a restricciones relativas al estado tensional, desplazamientos, cantidad de material utilizado, etc. Esto permite resolver problemas condicionados por fenómenos de inestabilidad, al igual que otros gobernados por el comportamiento a flexión. Tanto la función objetivo, como las restricciones, en general son no lineales, motivo por el que se ha elegido como técnica de optimización un método de Programación No Lineal, concretamente el *algoritmo de Programación Cuadrática Sucesiva* (SQP, *Sequential Quadratic Programming*[10] [12]) junto con la herramienta de computación técnica MATLAB®[2][5]. Además, el código de programación se ha desarrollado de forma que la elección de variables resulte sencilla y versátil, con posibilidad de modificar la función objetivo, y, por último, de manera que sea muy simple tanto eliminar como añadir nuevas restricciones al problema.

4.1. VARIABLES DE DECISIÓN. PARÁMETROS DE DISEÑO

Con ánimo de no complicar la exposición del método y buscando una fácil visualización de los resultados, se

plantea que la sección transversal de las barras dependa de un solo parámetro r , que puede ser el radio si la sección es circular, el canto para sección en doble T, etc. Este parámetro puede variar a lo largo de la coordenada espacial s de cada barra $r(s)$. Se supone, sin pérdida de generalidad, un tipo de variación polinómica en función de un número finito de parámetros (a_i), si bien es posible plantear cualquier otra función:

$$r(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n \quad (7)$$

Estas simplificaciones permiten ilustrar de forma clara la metodología y comparar algunos resultados con los disponibles en la literatura[1]. Con este procedimiento se valida el método (apartado 5.1) antes de extender su aplicación a casos de mayor interés (ejemplos 5.2 y 5.3). En 5.1 se busca la variación óptima del diámetro de la sección transversal de una columna circular maciza, y en 5.2 y 5.3 el canto en los extremos de los pilares y dinteles de pórticos, donde por razones constructivas se asume que la ley de variación es lineal.

4.2. FUNCIÓN OBJETIVO

Con el propósito de poder optimizar incluso perfiles sometidos a compresión centrada, donde el criterio que condiciona el diseño es precisamente la aparición del fenómeno de pandeo con deformaciones de flexión planteado en los apartados previos, se establece como función objetivo:

$$\max_{a_i} \lambda_{cri}(a_i) \quad (8)$$

Se trata por tanto de buscar el máximo valor del factor λ_{cri} que provoca el pandeo del conjunto.

4.3. RESTRICCIONES

La primera restricción que se ha considerado es la de limitar la cantidad de material empleado. Un posible planteamiento consiste en fijar o limitar dicho valor de tal manera que la solución final con barras de sección variable no pese más que la inicial construida con barras de sección uniforme:

$$\sum_{i=1}^b \int_0^{L_i} \pi r_i^2(s) ds \leq \sum_{i=1}^b \int_0^{L_i} \pi r_{0,i}^2 ds = V_0 \quad (9)$$

siendo b , el número de barras o elementos que forman el pórtico.

La segunda restricción es que la tensión equivalente máxima no supere en ningún punto de la estructura la máxima tensión de trabajo del material, es decir, que sea siempre menor que la tensión de fluencia. Para ello se debe adoptar algún criterio de plastificación, como por ejemplo el de Von-Mises para materiales dúctiles:

$$\sigma = \frac{|H_i(s)|}{A_i(s)} + \frac{|M_i(s) \cdot r_i(s)|}{2 \cdot I_{z,i}(s)}$$

$$\tau = \frac{V_i(s) \cdot Q_{z,i}(s, y)}{b_i(y) \cdot I_{z,i}(s)} \quad (10)$$

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_F$$

En estas expresiones se consideran las tensiones normales debidas al esfuerzo axial y momento flector, y las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante como usualmente se hace en el cálculo de estructuras metálicas. Para estructuras de hormigón armado se hacen necesarias otras comprobaciones, tanto globales como locales, y otros criterios, que en principio no se consideran en este trabajo. De igual modo, y con ánimo de no complicar la exposición del método de optimización, no se han considerado los coeficientes de mayoración de las acciones y/o minoración de las resistencias del material comunmente incluidos en las normativas (CTE, Eurocódigos, etc.), y se ha trabajado por lo tanto únicamente con valores nominales.

Nótese que las restricciones (9) y (10), al igual que la función objetivo (8) son funciones fuertemente no lineales.

Se pueden añadir las condiciones de diseño que resulten necesarias como nuevas restricciones del problema. Por ejemplo, entre otras, se puede limitar la respuesta de la estructura en deformaciones y desplazamientos, en frecuencias propias, etc. Incluso cabe la posibilidad de otros planteamientos del problema, como puede ser fijar un valor mínimo de la carga crítica (nueva restricción) y buscar la solución geométrica del pórtico en función de los parámetros de diseño escogidos que minimiza la cuantía de material (nueva función objetivo).

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación varios ejemplos de complejidad creciente, con los que se pretende mostrar la metodología de cálculo expuesta en los puntos anteriores, los valores numéricos comunes para todos los ejemplos son:

$$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}; \rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}; \sigma_F = 275 \text{ MPa}; T_1 = 40^\circ\text{C}; T_2 = 20^\circ\text{C}$$

5.1. VIGA EMPOTRADA-LIBRE

En este ejemplo, a modo de validación, se resuelve el problema de una barra (de sección circular maciza) empotrada-libre sometida a carga de compresión (P), carga distribuida transversal (q), peso propio (ρ) y una variación lineal de la temperatura en el canto (T_1, T_2) mostrado en Figura 3. La geometría óptima corresponde a un fuste con una variación del radio según una curva tipo cicloide tal y como demostraron los trabajos de Clausen, Keller[7] y Tadjbakhsh[18], y que queda claramente justificado mediante la teoría matemática de análisis funcional en

el reciente trabajo de Atanackovic[1]. La carga crítica (función objetivo a maximizar) se obtiene en cada iteración del proceso de optimización como el menor de los valores propios del problema de frontera correspondiente, que en este caso concreto queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} M''(s) + \lambda P \theta(s) + \lambda q + \rho g A(s) = 0 \\ v'(s) = \theta(s) \\ M(s) = EI_z(s) \left(\theta'(s) + \frac{\alpha}{h(s)} (T_1 - T_2) \right) \end{cases} \text{ s.a. : } \begin{cases} v(0) = 0, \theta(0) = 0 \\ V(L) = 0, M(L) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Como referencia con la que comparar los resultados obtenidos en los casos de inercia variable se incluyen los resultados correspondientes al caso de sección uniforme de radio $r(s) = r_0 = 12 \text{ cm}$.

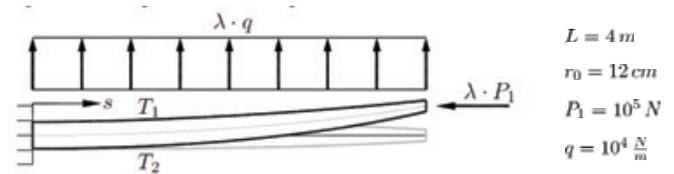


Figura 3: Viga empotrada-libre, modo de pandeo

Buscando la forma óptima, se presentan resultados para los casos de variación lineal, cuadrática y cúbica del canto a lo largo de la longitud de la viga. Los valores óptimos calculados se muestran en la Tabla 1 y se dibujan en la Figura 4. Se comprueba algo que es bien sabido: la carga transversal (q), el peso propio (ρ) y la variación térmica (T_1, T_2) no influyen en el valor de la carga crítica, aunque lógicamente si que afecta a la respuesta en tensiones y/o desplazamientos de la viga.

	uniforme	lineal	cuadrática	cúbica
$r(s) = r_0$		$r(0) = 1.25142 \cdot r_0$	$r(0) = 1.10858 \cdot r_0$	$r(0) = 1.13642 \cdot r_0$
		$r(L) = 0.725333 \cdot r_0$	$r(L/2) = 1.065 \cdot r_0$	$r(L/3) = 1.124 \cdot r_0$
			$r(L) = 0.531 \cdot r_0$	$r(2L/3) = 0.956833 \cdot r_0$
				$r(L) = 0.480083 \cdot r_0$
λ_{cri}	52.7418	65.623	69.309	69.741

Tabla 1: Viga empotrada-libre, resultados

De los resultados se puede concluir que la solución para variaciones polinómicas de mayor grado se aproxima a la

solución teórica presentada por Keller[7], si bien en dicha publicación no se ha considerado la restricción en tensiones, de ahí que en el extremo libre el canto no sea nulo como ocurre en [7].

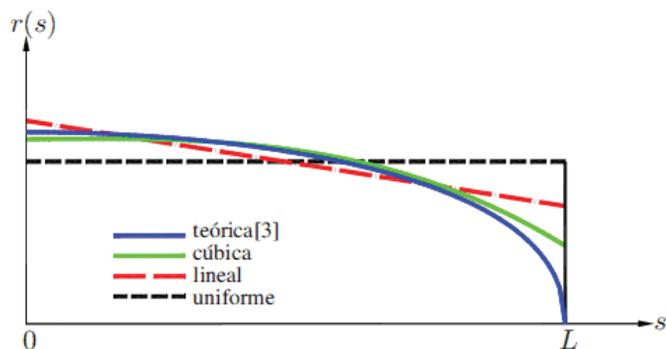


Figura 4: Viga empotrada-libre, variación longitudinal del canto [escala: vertical (10:1), horizontal (1:1)].

5.2. PÓRTICO DE LEE

La estructura denominada en la literatura ‘Pórtico de Lee’[13], permite ilustrar de forma clara y sencilla el objetivo de este trabajo y las posibilidades de generalización de la técnica numérica empleada.

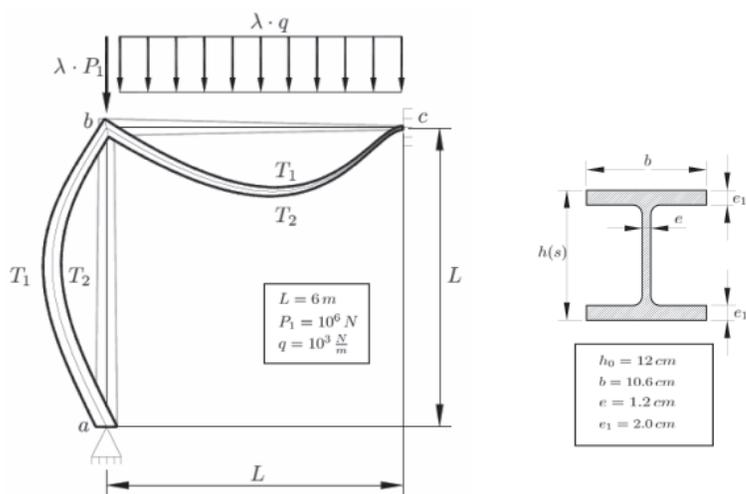


Figura 5: Pórtico de Lee, modo de pandeo

Se considera inicialmente que el pórtico está formado por barras iguales en cuanto a longitud (L), material (E, ρ, α) y perfil (sección tipo doble T, correspondiente a un HEM100: h_0, b, e, e_1), y se supone unión rígida pilar-dintel. Desde el punto de vista práctico, puede resultar muy interesante diseñar el pórtico con perfiles de inercia variable. Para una variación lineal del canto cabe preguntarse cómo dimensionar dichos perfiles para que la estructura tenga máxima resistencia al pandeo. Para ello se han considerado tres parámetros (valor del canto en las secciones $-a, b, c-$), y tras el proceso numérico

se obtienen los resultados indicados en la Tabla 2 para las condiciones de contorno mostradas en la Figura 5.

perfil uniforme		variación lineal del canto	
$r_a = h_0$	$\lambda_{cri} = 0.957$	$r_a = 20.841 \text{ cm}$	$\lambda_{cri} = 1.568$
$r_b = h_0$	$\sigma_{eqv} = 217.3864 \text{ MPa}$	$r_b = 9.893 \text{ cm}$	$\sigma_{eqv} = 213.2783 \text{ MPa}$
$r_c = h_0$		$r_c = 7.373 \text{ cm}$	

Tabla 2: Pórtico de Lee, resultados

Como muestra de las posibilidades del método, se pueden cambiar de manera simple las condiciones de contorno y del tipo de unión entre barras. Se contempla la posibilidad de considerar cualquier tipo de libertad interna entre cada una de las barras que concurran en un mismo nudo, lo que permite dotar al método de análisis de una gran versatilidad. Así, por ejemplo, suponiendo empotrada la base del pilar (sección a) y unión articulada pilar-dintel (sección b), la solución hubiera sido:

perfil uniforme		variación lineal del canto	
$r_a = h_0$	$\lambda_{cri} = 1.323$	$r_a = 23.370 \text{ cm}$	$\lambda_{cri} = 2.333$
$r_b = h_0$	$\sigma_{eqv} = 192.7055 \text{ MPa}$	$r_b = 9.310 \text{ cm}$	$\sigma_{eqv} = 205.4909 \text{ MPa}$
$r_c = h_0$		$r_c = 6.010 \text{ cm}$	

Tabla 3: Pórtico de Lee, base del pilar empotrada y unión articulada pilar-dintel

En primer lugar, recordar que todo problema de diseño se reduce siempre a un problema de optimización, en general con uno o más objetivos ponderados y con distintos tipos de restricciones: funcionalidad, seguridad, estabilidad, precio, estética, etc., lo que justifica el interés de este tipo de aportaciones y más hoy en día donde se tiende a abordar problemas de multifísica con equipos multidisciplinares

5.3. PÓRTICO SIMPLE A DOS AGUAS

Se aplica finalmente la técnica de análisis a un pórtico simple a dos aguas, sometido a las cargas mostradas en la Figura 6, y en la hipótesis que todos los nudos sean rígidos. Se buscará la solución simétrica de mayor resistencia al pandeo suponiendo, como en el ejemplo anterior, la posibilidad de variación lineal del canto. En estas condiciones la solución para r en las secciones -a,b,c- se muestra en la Tabla 4.

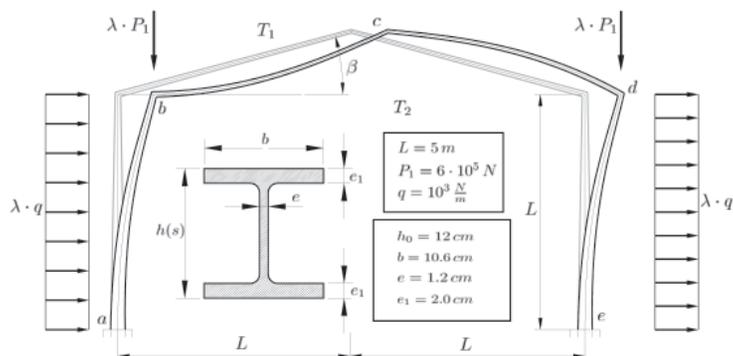


Figura 6: Pórtico simple a dos aguas, resultados y modo de pandeo

perfil uniforme		variación lineal del canto	
$r_a = r_e = h_0$	$\lambda_{cri} = 0.939$	$r_a = r_e = 24.0 \text{ cm}$	$\lambda_{cri} = 1.516$
$r_b = r_d = h_0$	$\sigma_{eqv} = 165.6357 \text{ MPa}$	$r_b = r_d = 9.151 \text{ cm}$	$\sigma_{eqv} = 113.8735 \text{ MPa}$
$r_c = h_0$		$r_c = 5.698 \text{ cm}$	

Tabla 4: Pórtico simple a dos aguas, resultados

De nuevo, y a modo de ejemplo, se pueden modificar alguna de las condiciones de contorno iniciales del problema y ver cómo afecta al grado de estabilidad de la estructura y al nivel máximo de tensiones, así, suponiendo pórtico triarticulado (en secciones a, c y e), la solución se modifica y lleva a los resultados indicados en la Tabla 5:

perfil uniforme		variación lineal del canto	
$r_a = h_0$	$\lambda_{cri} = 0.221$	$r_a = 5.802 \text{ cm}$	$\lambda_{cri} = 0.323$
$r_b = h_0$	$\sigma_{eqv} = 182.5123 \text{ MPa}$	$r_b = 19.266 \text{ cm}$	$\sigma_{eqv} = 164.2356 \text{ MPa}$
$r_c = h_0$		$r_c = 3.666 \text{ cm}$	

Tabla 5: Pórtico simple a dos aguas, pilares apoyados y clave en el dintel

6. CONCLUSIONES

En primer lugar, recordar que todo problema de diseño se reduce siempre a un problema de optimización, en general con uno o más objetivos ponderados y con distintos tipos de restricciones: funcionalidad, seguridad, estabilidad, precio, estética, etc., lo que justifica el interés de este tipo de aportaciones y más hoy en día donde se tiende a abordar problemas de multifísica con equipos multidisciplinares.

Respecto a la metodología, el punto de partida ha sido la Teoría de pandeo de Euler, que asume pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones junto con el planteamiento del equilibrio en la configuración deformada (Teoría de Segundo Orden), y que da lugar a los conceptos de carga crítica y modo de pandeo, consecuencia del modelo matemático planteado. Se trata de un método de cálculo que no se puede englobar dentro de los métodos de rigidez (o de equilibrio) ni como un método de flexibilidad (o de compatibilidad), sino que es un método novedoso basado en la formulación diferencial a nivel de barra y en el cumplimiento riguroso de las condiciones de equilibrio y compatibilidad a nivel de estructura. Este planteamiento tiene la gran ventaja de poder considerar sección transversal variable a lo largo de cada barra sin el requisito de los usuales métodos de cálculo de la matriz de rigidez o flexibilidad, y, por lo tanto, sin la necesidad de actualizar dicha matriz para cada barra en cada iteración, lo que supone un gran ahorro de cómputo en el proceso de optimización. Así mismo, también permite considerar en el análisis cualquier tipo de carga, incluido el efecto del peso propio y de la temperatura.

Con el método propuesto, el cálculo de la respuesta de la estructura se hace muy sencillo y directo. Además el planteamiento matemático de la inestabilidad como un problema de autovalores gracias a las ecuaciones de estabilidad junto con las de equilibrio, compatibilidad y condiciones de contorno, permite obtener como resultado adicional del análisis la carga crítica y el modo de pandeo con esa misma metodología.

La herramienta de análisis desarrollada es sistemática, sencilla y permite incluir otros modelos teóricos (lineal, no-lineal, grandes desplazamientos, etc.), cargas de cualquier tipo dentro del elemento, todo tipo de libertades en las uniones, cualquier tipo de apoyo incluido apoyos elásticos, además de lógicamente barras no prismáticas.

La principal desventaja viene dada por las características típicas de un método de optimización no lineal, sobre todo en lo relativo a la limitación en el número de parámetros para que los tiempos de cómputo no sean excesivos. De hecho en programación no lineal, en la actualidad, existe toda una línea de investigación con el objetivo de desarrollar técnicas numéricas orientadas a dar solución a problemas con gran número de parámetros. Algo que se está consiguiendo gracias al desarrollo de algoritmos cada vez más eficientes y al continuo avance de la capacidad de cálculo.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Atanackovic T. "Optimal shape of an elastic rod in flexural-torsional buckling". *Z. Angew. Math. Mech.* Vol.87-6 p.399-405 2007.
- [2] Cleve M. "Numerical Computing with MATLAB". SIAM Philadelphia 2004.
- [3] Cacho M, Lorenzana A. "Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte II". *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* Vol.26 p.31-8 2010.
- [4] Fu K, Ren D. "Optimization of axially loaded non-prismatic column". *Computers and Structures* Vol.43-1 p.159 - 62 1992.
- [5] Gilat A. "MATLAB: An Introduction With Applications". 3a ed. John Wiley & Sons, Inc. 2008. ISBN: 978-0-470-10877-2.
- [6] Hernandez-Vazquez J. "ESTRUCTURAS Y EFECTOS DINAMICOS DEL VIENTO ". *DYNA Ingeniería e Industria* Vol.80-2 p.09-12 2005
- [7] Keller J. "The shape of the strongest column". *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol.5 p.275-85 1960.
- [8] Lorenzana A, Cacho M. "Cálculo directo de la carga crítica de pandeo de pórticos. Parte I". *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* Vol.25-3 p.247-58 2009.
- [9] Monleón S. "Análisis de vigas, arcos, placas y láminas: una presentación unificada". Universidad Politécnica de Valencia 1999.
- [10] Maciel M. "Introducción a la Optimización Numérica". Ph. D in Mathematical Sciences Rice University Houston Texas 2000.
- [11] Miralbes-Buil R, Castejon-Herrer L. "Diseño y optimización de plumines para carretillas manipuladoras". *DYNA Ingeniería e Industria* Vol.83-5 p.182-190 2009.
- [12] Nocedal J, Wright S. "Numerical Optimization". Springer-Verlag New York Inc 1999. ISBN: 0-387-98793-2.
- [13] Ortega M, Romero J, Rosa E. "Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte I y II". *Informes de la Construcción* Vol.59, 507 p.69-81 y 508 p.61-71 2007.
- [14] Sebastián-Sanz J, Casado-Sanchez C, Lorenzana-Ibán A, et al. "Sistemas de control de vibraciones para gruas torre". *DYNA Ingeniería e Industria* Vol.84-3 p.237-244 2009.
- [15] Simitses G, Hodges D. "Fundamentals of Structural Stability". Elsevier Inc. 2006. ISBN: 978-0-7506-7875-9.
- [16] Spillers W, Levy R. "Optimal design for axisymmetric cylindrical shell buckling". *J. Engng. Mech.* Vol.115 p.1683-90 1989.
- [17] Spillers W, Levy R. "Optimal design for plate buckling". *J. Struct. Engng.* Vol.116 p.850-8 1990.
- [18] Tadjbakhsh T, Keller J. "Strongest column and isoparametric inequalities for eigenvalues". *J. Appl. Math.* Vol.9 p.159-64 1962.
- [19] Taylor J. "The strongest column - an energy approach". *J. Appl. Mech.* Vol.34 p.486-7 1962.
- [20] Timoshenko S. "History of Strength of Materials". Dover Publ. Inc. New York 1953.
- [21] Timoshenko S, Goodier J. "Teoría de la Elasticidad". Urmo 1975.
- [22] Truesdell C. "Ensayos de historia de la Mecánica". Tecnos Madrid Spain 1975.