Sr. Director de la Revista DYNA
Alameda de Mazarredo, 69-2º 48009 BILBAO — Fuenterrabía, 14 de noviembre de 2005

Estimado amigo:

Con fecha 6 de enero les envié una solución a “Un problema de **Fermat**” publicado en la revista (Volumen LXXIX -Nº6), en la Pág 89, solución que fue publicada en la revista LXXX-3. En aquella ocasión, quedó sin resultado (tal vez sea mejor decir sin solución) el punto c) y ahora la sé, así como un enfoque del problema que para mí es mucho más elegante y didáctico. Lo encontré sin buscarlo, simplemente por Internet. Buscando la palabra Fermat, la encontré en la dirección:

Página diseñada por: Carlos Fleitas (Departamento de Matemáticas I.E.S. "Marqués de Santillana" Colmenar Viejo, Madrid) http://www.pntic.mec.es/

Recomiendo visitar esta página que trae varios problemas, especialmente de triángulos, con unos *applets* muy interesantes y didácticos. Me alegraré si publica esta carta en la Sección Cartas al director.

Reciba un muy cordial saludo.

Luis Mª Aznar
Ingeniero Industrial

Respuesta al problema de FERMAT (DYNA julio-agosto-septiembre de 2004)
Quedó sin respuesta la pregunta c) cuyo enunciado era:
Siendo a, b, c las medidas del triángulo ABC dado, expresar la distancia mínima como función de a, b, c

El enunciado del problema era: Dado un triángulo acutángulo, determinar un punto de su plano (entonces se llamó F, ahora lo llamo P con el fin de coincidir con los dibujos de D. Carlos Fleitas), tal que la suma de distancias a los 3 vértices sea mínima.

La idea principal de lo que sigue la encontré en internet:

Página diseñada por: Carlos Fleitas (Departamento de Matemáticas I.E.S. “Marqués de Santillana” Colmenar Viejo, Madrid) http://www.pntic.mec.es/

Página que recomiendo consultar, muy didáctica, felicito a D. Carlos.

Conocido el triángulo ABC, construimos 2 triángulos equiláteros, el ABB_1 sobre el lado AB, y el BPP_1 sobre el BP.

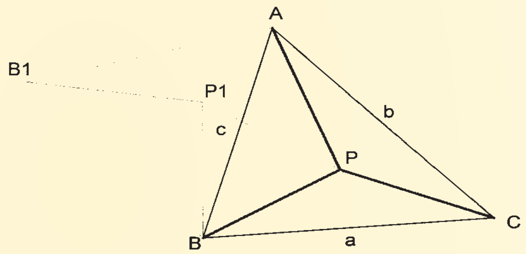
Si nos fijamos en la figura, veremos que el triángulo BP_1B_1 es el BPA girado 60° hacia la izquierda, por lo cual tenemos: $B_1P_1=AP$ y $P_1P_1=BP$

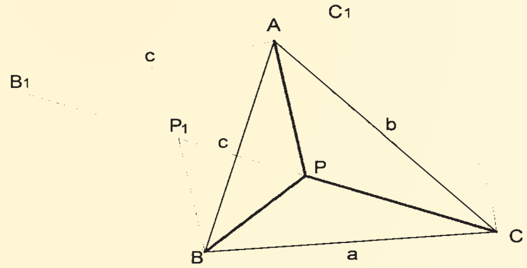
Luego la longitud de la línea quebrada B_1P_1PC = suma de distancias buscada. Cuando su longitud sea mínima, es decir cuando B_1P_1PC estén alineados, tendremos el punto P buscado.

El siguiente paso es evidente, puesto que los puntos B_1 y C son fijos, ¿existe un punto P tal que él y su girado 60º P1 estén alineados con B_1C?. La respuesta es si, sí consideramos que el punto P recorre la recta B_1C el P_1 recorrerá la recta obtenida al girar 60º la B_1C (en el dibujo P_1C_1) el punto de corte de las rectas B_1C y la P_1C_1 será el P_1 y su equivalente P será el punto buscado.

Tal como estaba el enunciado del problema, hay que demostrar que el ángulo BPA mide 120º, para ello tenemos que el dicho ángulo es igual al BP_1B_1 ya que los triángulos BPA y BP_1B_1 son iguales. El ángulo BP_1B_1 es igual a la suma de los BPP_1 y P_1BP luego mide 120º.

La solución a la pregunta c), de cuál es la suma de distancias, se obtiene aplicando el Teorema del coseno a los triángulos BAC y da:





$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$; $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ y al B_1AC y da:

$$D^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A + 60^\circ) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot (\cos A \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} 60^\circ)$$

$$D^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \left(0{,}5 \cdot \cos A - \left(\sqrt{3}/2\right) \cdot \operatorname{sen} A\right) = b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot \left(\cos A - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} A\right)$$

$$D^2 = b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A}\right)$$

$$D^2 = b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)^2}\right)$$

$$D^2 = b^2 + c^2 - 0{,}5 \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(4 \cdot b^2 \cdot c^2\right) - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(4 \cdot b^2 \cdot c^2\right) - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(4 \cdot b^2 \cdot c^2\right) - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2} = \sqrt{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - b^4 - b^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot a^2 - b^2 \cdot c^2 - c^4 + c^2 \cdot a^2 + a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 - a^4}$$

$$= \sqrt{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \sqrt{2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$= \sqrt{2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$, luego tenemos

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(4 \cdot b^2 \cdot c^2\right) - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2 \cdot \left(b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2\right) - a^4 - b^4 - c^4}}}$$

Cualquiera de las dos soluciones es válida. No sé cuál es más simple. Úsese la que se prefiera. Las he comprobado con dos triángulos, sus dibujos y una hoja de cálculo y los resultados coinciden. ■

Luis Mª Aznar