

Las cartas para esta Sección deberán tener un contenido máximo de 300 palabras.

Valladolid, 15 de marzo de 2007

Sr. Dr. de la revista DYNA
Bilbao

Querido amigo:

Continuando mi carta del 17 de enero, os adjunto la solución al problema propuesto repitiendo el enunciado del mismo por si algún lector no lo tuviera a mano y se sintiera interesado en el caso.

Enunciado

Se tiene una hoja de papel rectangular y n colores distintos. En una cara de la hoja hay dibujadas líneas que la dividen en n regiones y cada región está coloreada con un color distinto, como si fuera un mapa. En la otra cara de la hoja, Martín dibuja a su antojo líneas que dividen la hoja en n regiones. Jorge debe colorearlas usando los n colores con un color distinto para cada región.

Llamaremos *zonas de coincidencia* a las zonas de la hoja en las que el color que usó coincide con el color que hay del otro lado de la hoja.

Jorge gana si el área total de las *zonas de coincidencia* es mayor o igual que $1/n$ del área de la hoja del papel. En caso contrario, gana Martín.

Demostrar que Jorge siempre puede ganar.

Agradeciendo vuestra colaboración, recibid un cordial saludo.

Adolfo Arranz Velasco
Ingeniero Industrial

Valladolid, abril 2007

Sr. Dr. de la revista DYNA
Bilbao

Querido amigo:

Tengo el gusto de adjuntaros la solución al problema enviado con mi carta del 17 de enero y cuya publicación me anunciaste para el número de junio.

Solución

Se nos pide demostrar que, sin importar la forma en la que Martín divida la otra cara del papel en n regiones, Jorge siempre podrá elegir sus colores de modo que el área total de las *zonas de coincidencia* sea mayor o igual que $1/n$ del área de la hoja del papel.

Jorge sólo puede escoger una combinación de colores, pero ¿qué ocurriría si éste utilizase las $n!$ formas posibles de colorear su cara del papel? Entonces cada región tendría $(n-1)!$ veces el mismo color, que son las formas de colorear el resto de regiones con los otros $n-1$ colores.

En la otra cara del papel, en el área situada debajo de esta región que tiene $(n-1)!$ veces el mismo color, habrá m colores diferentes. Cuando Jorge hubiese utilizado todas sus combinaciones, cada uno de los m colores habría sido superpuesto $(n-1)!$ veces. Lo mismo ocurriría con el resto de regiones y, por lo tanto, con el área total de la hoja de papel.

Si Jorge colorease la cara del papel de las $n!$ formas posibles, la suma total de las áreas de las *zonas de coincidencia* sería, exactamente, $(n-1)!$ veces el área de la hoja.

En una suma de p términos cuyo resultado es S existe al menos uno de ellos que es mayor o igual que S/p , ya que, si todos fuesen menores, la suma nunca podría ser S .

Jorge siempre podrá elegir una combinación de colores cuya área total de las *zonas de coincidencia* sea mayor o igual que $(n-1)!/n!$, esto es, $1/n$, del área de la hoja de papel.

Un saludo cordial y gracias por vuestra atención.

Adolfo Arranz Velasco
Ingeniero Industrial