

ORIENTE Y OCCIDENTE EN LA FORMACIÓN DE LA CIENCIA MATEMÁTICA* (y 2ª parte)

Manuel López Pellicer
E.T.S. de Ingenieros
Agrónomos de Valencia

* Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat. Vol. 1, 2005.

ESCUELAS MATEMÁTICAS ÁRABES EN LOS SIGLOS X Y XI

En la Trigonometría árabe hubo competencia inicial entre la basada en la Geometría de las cuerdas, tal como aparecía en el *Almagesto* de **Ptolomeo**, y la basada en las tablas de senos hindúes como las que aparecen en el *Sindhind*. El conflicto también se resolvió a favor de la postura hindú por lo que la mayor parte de la Trigonometría se construyó basada sobre la función seno.

La Trigonometría llegó a Europa a través de los árabes gracias al libro de **Albategnius** (en árabe, AlBattani 850-929) *Sobre el movimiento de las estrellas*, donde utiliza para el triángulo rectángulo la relación $b = c \sin(90 - C)/\sin C$.

Un poco más tarde, con **Abu'l-Wefa** aparecen en Bagdad la tangente y las ideas básicas sistemáticas de la Trigonometría moderna. También se



Al-Battani

le debe la formulación del *Teorema del seno* para triángulos esféricos.

Con todo, no debemos atribuir a Abu'l-Wefa la función tangente pues en India y Arabia se utilizaba una teoría de longitudes de sombras: La sombra horizontal proyectada por una varilla de longitud unidad es lo que conocemos como cotangente. La sombra proyectada sobre una pared vertical por una varilla fijada perpendicularmente a la pared nos daría la función tangente.

Abu'l-Wefa también se ocupó del Álgebra y se le debe la traducción desde el griego de la *Aritmética* de **Diofanto**, que le permitió a su sucesor **Al-Karkhi** convertirse en el discípulo árabe de Diofanto. Aunque siguió la costumbre árabe de dar



Avicena

demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones cuadráticas no se limitó a ellas y se le atribuye la primera resolución numérica de ecuaciones de la forma

$$ax^{2n} + bx^n = c$$

Es en esta dirección de intentar resolver de manera algebraica, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que dos, en la que iban

a tener lugar los primeros desarrollos de la Matemática en el Renacimiento.

En Persia destacó **Ibn- Sina** (980-1037), conocido en Occidente como **Avicena**. Fue el sabio enciclopédico más importante del Islam con un papel muy destacado en Medicina y Filosofía. Hizo una traducción de *Los Elementos* de **Euclides** y obtuvo importantes aplicaciones de la Matemática a la Astronomía y a la Física. Dio una explicación de la *Regla de los nueve* por lo que se le atribuye a veces indebidamente su descubrimiento. Avicena supone la definitiva reconciliación del saber griego con el pensamiento islámico.

Al-Biruni (973-1048) fue un viajero infatigable y un pensador crítico que familiarizó a los árabes con la Cultura India por medio de su libro *La India*. Hace una descripción muy interesante del principio posicional del sistema de numeración, expone que **Arquímedes** ya conocía la fórmula de **Herón**, da una demostración de esta fórmula y de una análoga de **Brahmagupta** para el cuadrilátero, insistiendo que sólo tiene validez para los cuadriláteros cíclicos. Reduce el problema de inscribir el eneágono a la resolución de la ecuación $x^3 = 1 + 3x$, que resuelve aproximadamente por la fracción sexagesimal 1; 52, 15, 17, 13.



Al-Biruni



Alhacén

Le debemos una interesante discusión sobre el posible giro de la Tierra alrededor de su eje así como estudios sobre pesos específicos y pozos artesianos.

En el Cairo existió una espléndida Escuela en la que destacó el gran astrónomo **Ibn Yunus** a quien la Matemática le debe la fórmula de transformación de productos de cosenos en sumas, tan utilizada antes de la invención de los logaritmos neperianos. Pero la figura más destacada de El Cairo fue el físico **Ibn Al-Haitham** (965-1039), conocido en Occidente como Alhazen, a quien se debe *La Óptica*, inspirado en la obra de **Ptolomeo** sobre reflexión y refracción, donde estudió la estructura del ojo, explicó el aparente aumento del tamaño de la Luna al acercarse al horizonte y estimó la altura de la atmósfera por la observación de que el crepúsculo dura hasta que el Sol está unos 19 grados por debajo del horizonte. Extendió resultados de **Arquímedes** sobre conoides y volúmenes.

Una pregunta natural es indicar qué había en Occidente durante el s. XI, pero sólo encontramos desdichados tratados sobre el calendario y sobre el uso del ábaco. La correspondencia entre los buenos calculistas **Ragimbold** de Colonia y **Radolf** de Lieja, hacia finales del s. XI, es lamentable pues muestra que su Geometría estaba en un nivel prepitagórico.

La superioridad de la Cultura árabe en el siglo XI era tan grande que nos explicamos su orgullo intelectual, que alcanza el máximo cuando la de-

cadencia está próxima. En efecto, cuando la gente se envanece demasiado de su Cultura es, o porque es tan reciente que aún no se ha acostumbrado a ella, o bien, por el contrario, porque se encuentra ya en decadencia y trata de ocultar su incompetencia bajo el cúmulo de las hazañas pasadas. La superioridad árabe atrajo la producción de otras confesiones y razas cuyos científicos y literatos, como ya se ha indicado, fueron bien tratados en general. Algunos de ellos, como el judío **Hasdai ibn Shaprut**, de Córdoba, alcanzaron posiciones de autoridad.

NUEVOS HORIZONTES MATEMÁTICOS

Por lo que llevamos expuesto, la Matemática árabe comprendía:

- Una Aritmética basada en el principio posicional que probablemente provenía de la India.



Omar Khayyam

- Un Algebra con orígenes en Grecia, India y Babilonia, que adoptó una forma nueva y sistemática en manos de los árabes.

- Una Trigonometría proveniente de Grecia e India. Por esta última se inclinaron los árabes, ampliándola con nuevas funciones y relaciones.

- Y una Geometría de corte griego que los árabes enriquecieron con generalizaciones y estudios críticos relativos al axioma del paralelismo, como vamos a exponer a continuación.

Un siglo después de **Alhazen**, vivió en Persia el fabricante de tiendas

Omar Khayyam (1050-1123), conocido en el Este como científico y en Occidente recordado como uno de los más grandes poetas persas. En su obra *Álgebra* extendió la teoría de **Al-Khowarizmi** incluyendo las ecuaciones cúbicas, de las que pensaba que no podían resolverse geométricamente con regla y compás por el cubo que contenían, siendo necesario usar intersecciones de cónicas, como ya habían hecho antes **Menecmo**, **Arquímedes** y **Alhazen**. Para resolver $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, sustituye x^2 por $2py$, obteniendo la hipérbola $2pxy + 2apy + bx + c = 0$. Las soluciones reales de la ecuación cúbica vienen dadas por las intersecciones de esta hipérbola con la parábola $x^2 = 2py$.

Omar Khayyam siguió la tradición árabe de buscar soluciones aritméticas y geométricas de las ecuaciones algebraicas, pero se puso en el camino de cerrar el abismo entre el Álgebra numérica y geométrica, que culminaría **Descartes**. Khayyam escribió: *"Cualquiera que piense que el Álgebra es un sistema de trucos para obtener los valores de las incógnitas piensa vanamente. No se debe prestar ninguna atención al hecho, de que el Álgebra y la Geometría son en apariencia diferentes. Los hechos del Álgebra son hechos geométricos que están demostrados"*.

Al reemplazar la teoría de proporciones numéricas de **Euclides** por un planteamiento numérico, **Khayyam** se acercó a la definición de número irracional, siendo un antecedente de la introducción del número real. Por un comentario que hace en su *Álgebra*, referente a otro de sus libros perdido, parece que conocía el hoy llamado *Triángulo de Pascal* para la obtención de potencias de sumas, descubierto también en China por esa época. Parece que se trata de dos descubrimientos independientes dado que entonces la comunicación entre China y Arabia se reducía a la ruta de la seda.

El intento de demostrar el quinto Postulado de **Euclides** ejerció especial fascinación sobre los árabes. Este intento ya se había convertido para los griegos en *"el cuarto famoso problema de la Geometría"*. **Alhazen** intentó demostrarlo considerando un

cuadrilátero trirectángulo, llamado hoy *Cuadrilátero de Lambert* en honor al matemático del s. XVIII que lo estudió sistemáticamente. Alhazen creyó haber demostrado que el cuarto ángulo debía ser también recto, de lo que deducía la prueba del quinto Postulado de Euclides. Pero, en esa demostración, Alhazen supuso que el lugar geométrico de un punto que se mueve permaneciendo a distancia constante de una recta es otra recta paralela a la dada, lo que se ha demostrado modernamente que es equivalente al Postulado de Euclides.

Omar Khayyam criticó la demostración de **Alhazen** basándose en que **Aristóteles** había excluido el uso del movimiento en Geometría. Khayyam partió de un cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a su base, llamado hoy día *Cuadrilátero de Saccheri* en honor del matemático del s. XVIII que investigó las posibilidades que pueden darse con los dos ángulos superiores, necesariamente iguales: 1) que sean agudos, 2) obtusos o 3) rectos. Las dos primeras posibilidades las excluye Khayyam basándose en que dos rectas convergentes deben cortarse, principio que atribuye a **Aristóteles** y que supone una nueva hipótesis equivalente al postulado del paralelismo de **Euclides**.

LA DECADENCIA EN LA MATEMÁTICA ÁRABE

Cuando, en 1123, murió **Omar Khayyam**, la Ciencia árabe se encontraba ya iniciando un período de decadencia. Los excesos de división



política y religiosa en numerosas sectas, (a veces fanáticas) como lo ilustra muy bien el origen de nuestra palabra "*asesino*", proveniente de la secta de los *hasisyun* consumidores de *hasis* (o *assassins*), situada alrededor del 1100, podrían estar entre las causas de la decadencia no sólo de la Ciencia árabe sino de todo el Islam que en los s. XII y XIII había perdido su vigor, en tanto que la Cristiandad había advertido la riqueza del saber greco-árabe y hacía gigantescos esfuerzos para compartirlo.

La decadencia no pudo impedir que grandes eruditos y científicos árabes siguiesen apareciendo hasta el siglo XIV y aún más allá, si bien no se alcanzaron los niveles globales de la época de **Avicena** y de **Al-Karkhi**. Por ejemplo, matemáticos y astrónomos como **Jábir ibn Aflah**, **Al-Bitrúji**, **Al-Hasan Al-Marrákushi**, **Násir Eddin Al-Tusi** y **Al-Kashi**; físicos como **Al-Kháziní**, **Qutb Al-Din Al-Shirazi**, **Kamál Al-Din Ibn Yúmus**; geógrafos como **Yáqút**, **Al-Qazwini**, **Abú-Ifidá Ibn Batuta**; filósofos como **Ibn Rushd**, **Fakhr Al-Din Al-Rázi**, **Abd Al-Latif**; médicos como **Ibn Sur** e **Ibn Al-Baitár**; botánicos y tratadistas de Agricultura como **Ibn Al-Súri** e **Ibn Al-Awwám**; historiadores como **Ibn Khallikan**, **Rashid Al-Din**, **Ibn Khaldún**, **Al-Maqrizi**, etc. Brevemente vamos a describir la obra de dos de ellos: **Al-Tusi** y **Al-Kashi**.

Nasir Eddin Al-Tusi (1201-1274), nieto de **Gengis Khan**, continuó los esfuerzos por demostrar el postulado de las paralelas partiendo de las tres hipótesis posibles del *Cuadrilátero de Saccheri*. Se considera a **Nasir Eddin** como uno de los precursores de la Geometría no euclídea pues la traducción de su obra por **Wallis** en el s. XVII fue el punto de partida de los desarrollos llevados a cabo por **Saccheri** en el primer tercio del s. XVIII.

A **Nasir Eddin** se le debe el primer tratado sistemático sobre Trigonometría plana y esférica, exponiéndola como una materia independiente en sí misma y no como una ayuda para la Astronomía. Estudió las seis funciones trigonométricas dando reglas para la resolución de los diferentes casos de triángulos planos y esféricos.



Ulugh Beg

También se le debe el intento de reconciliar las cosmologías de **Aristóteles** y de **Ptolomeo** lo que parece llamó la atención de **Copérnico**.

A principios del s. XV, ya en plena decadencia de la Cultura árabe, nos encontramos con otra figura, **Al-Kashi**, protegido del príncipe **Ulugh Beg**, nieto del conquistador mongol **Tamerlán**. **Ulugh Beg** estableció su corte en Samarcanda donde hizo construir un observatorio de cuyo equipo de científicos formó parte **Al-Kashi**, quien escribió numerosas obras en árabe y en persa sobre Matemática y Astronomía. Destacó por la exactitud de sus cálculos. En la resolución de ecuaciones utilizó un método, llamado hoy de **Horner**, proveniente de China, de donde también adoptó la utilización de fracciones decimales para obtener muchas cifras decimales exactas.

Al-Kashi fue un virtuoso calculista y su aproximación de 2π mejoró todas las precedentes. El valor dado por **Al-Kashi** para 2π en forma sexagesimal y en forma decimal es respectivamente:

6;16,59,28,34,51,46,15,50 y
6,2831853071795865.

Hasta finales del s. XV, nadie igualó la exactitud de esta aproximación.

Tras la muerte de **Al-Kashi** en 1436, el colapso cultural del mundo árabe fue aún mayor que su desinte-

gración política. El número de matemáticos importantes posteriores a Al-Kashi es irrelevante. Afortunadamente, Europa estaba ya preparada para recibir el legado de la Antigüedad. Es injusto afirmar que los árabes sólo conservaron la ciencia griega en un frigorífico pues la transmitieron a los occidentales en condiciones mejores que la habían recibido, con importantes incorporaciones hindúes, chinas y propias.

LAS TRADUCCIONES DEL ÁRABE

En cuanto los cristianos advirtieron la importancia de la cultura árabe, sintieron la necesidad de traducirla pues pocos tenían la esperanza de dominar un idioma tan distinto del propio y escrito con caracteres ilegibles y confusos. A finales del s. XI, **Constantino el Africano** tradujo gran número de obras greco-musulmanas del árabe al latín en el Monasterio de Monte Casino, donde murió en 1087. Esta actividad, lejos de aplacar el hambre de los estudiosos europeos, la estimuló considerablemente al ver los vastos tesoros de conocimiento, saber y experiencia acumulados del pasado.

Durante el s. XII y la primera mitad del XIII, la mayor actividad de los eruditos cristianos consistió en la traducción de tratados árabes al latín. Aparecieron traductores de tal entidad que casi merecen el nombre de creadores, como **Adelardo de Bath**, **Juan de Sevilla**, **Domingo Gundisalvo**, **Gerardo de Cremona**, tal vez el más famoso de todos, y muchos otros.

A fines del s. XII, el cuerpo principal de los conocimientos greco-árabes ya era accesible a los que leían en latín, pero cuanto más tenían más pedían.

Desde mediados del siglo siguiente, poco quedaba de la literatura científica árabe de verdadera importancia que no estuviera ya a su alcance. Estimulados por los escritos árabes muchos traductores se esforzaron en descubrir los originales griegos, y sus traducciones directas del griego siguieron muy de cerca a las del árabe. *Almagesto* fue traducido al latín desde el griego en 1160 antes de ser

traducido desde el árabe, trabajo que terminó Gerardo de Cremona en la **Escuela de Traductores de Toledo** en 1175. La fuerza de la traducción árabe y el prestigio personal de Gerardo de Cremona hicieron que la primera versión, tal vez más exacta, fuese desalojada por la segunda.

Hasta el s. XII, los judíos que vivían en el Islam eran bilingües. El hebreo era su lengua religiosa y doméstica pero, en lo concerniente a Filosofía y Ciencia, pensaban en árabe. No necesitaban traducciones y poseían secretos del saber que eran, hasta entonces, letra muerta para los cristianos especialmente en lo referente a enfermedades de la vista estudiadas en tratados árabes.

Pero en el siglo XII, la vida científica del judaísmo comenzó a desplazarse desde España a través de los Pirineos y, a mediados del s. XIII, gran número de judíos habían vivido tanto tiempo en países europeos que el árabe les era un idioma extraño. Hasta entonces, los judíos habían estado a la cabeza de los cristianos pero ahora la situación se invierte debido a que las traducciones del árabe al hebreo eran menos abundantes y, por tanto, los judíos de Europa occidental, que no hablaban árabe, no sólo se encontraban en inferioridad política, pues las Cruzadas habían provocado persecuciones antisemitas, sino también en situación de inferioridad intelectual. Aprendieron latín y pudieron leer las versiones latinas de los textos árabes. Durante el s. XIV aparecieron traducciones del latín al hebreo.

Hubo ciclos de traducciones aún más curiosos, pues en los s. XIV y siguientes escritos árabes, persas y latinos, que eran de origen griego, fueron retraducidos al griego. Así

sucedió con las *Summulae logicales* de **Pedro de España**, que fueron tra-



Ghiyath Al-Din Jamshid

ducidas al hebreo y al griego, lengua de su primera edición.

Las traducciones nos permiten apreciar los niveles relativos de las distintas civilizaciones y nos miden su nacimiento y decadencia, pues las corrientes en el mundo intelectual y en el material, nunca fluyen aguas arriba. La masa total de las traducciones permite concluir que en el s. XII la civilización musulmana declinaba y la judía no seguía el ritmo de expansión de la cristiana.

EL ESPÍRITU EXPERIMENTAL

El siglo XIII trajo los grandes doctores de la Cristiandad: **Alberto Magno**, **Roger Bacon**, **Ramón Llull**. Comienza la hegemonía intelectual y política de lo que llamamos mundo occidental, vinculado entonces al Cristianismo. Este vínculo se irá debilitando con el desarrollo del espíritu experimental, tal vez la aportación más importante de la Edad Media. En el s. XVI las distinciones entre ciencias judía, cristiana y musulmana

perdieron su razón de ser y sólo conservaron su valor histórico. No debemos considerar a **Spinoza** como un filósofo judío en el mismo sentido en que lo fueron **Maimónides** o **Levi ben Gershon**. El profundo judaísmo de Spinoza y el empleo frecuente de fuentes judías no es obstáculo para reconocer en **Spinoza** uno de los más nobles representantes del pensamiento humano, no oriental u occidental, sino de ambos.

Oriente y Occidente cooperaron como hermanos en el desarrollo del espíritu experimental, fundamental en la Ciencia moderna y del que tan deficiente estuvo el genio griego. Los grandes médicos griegos siguieron instintivamente métodos experimentales, que nunca fueron apreciados en su justo valor por los filósofos u otros estudiosos de la Naturaleza. Una historia de la ciencia experimental griega, fuera de la Medicina, sería demasiado breve. El espíritu experimental creció de la mano de los alquimistas y ópticos árabes y de los mecánicos y físicos cristianos. Durante siglos se mantuvo débil, pisoteado por filósofos pedantes. La imprenta y el descubrimiento del Nuevo Mundo aceleró su desarrollo. A comienzos del s. XVI, el espíritu experimental tiene considerable peso, siendo **Leonardo da Vinci** uno de sus valedores. En el siglo siguiente la Física fue admirablemente explicada por otro toscano, **Galileo**, heraldo de la Ciencia moderna.

Una visión amplia de la Historia de la Ciencia nos llevaría a considerar cuatro períodos principales. El primero consiste en el desarrollo empírico del Conocimiento en Egipto y Mesopotamia. El segundo es la construcción de una estructura racional de sorprendente belleza por los griegos. El tercero es el período medieval, con siglos de tanteos cuyo principal fruto fue la incubación del espíritu experimental. Su aparición definitiva señala la transición entre el tercer y cuarto período, que es el de la Ciencia moderna. El primero de estos períodos y gran parte del tercero son orientales. El segundo y el cuarto son occidentales. Quienes pretendan exagerar la importancia de Occidente en la for-

mación de la Ciencia es posible que no sean científicos y que ni siquiera comprendan lo que es la Ciencia. Desde luego, no merecen la superioridad de la que se envanecen.

El espíritu experimental dio paso a incontables e inimaginables descubrimientos y rompió con círculos viciosos donde los filósofos habían girado obstinadamente durante miles de años. Puede resumirse de la siguiente forma:

- Establecer los hechos mediante observaciones directas, frecuentes y cuidadosas, confrontándolos repetidamente entre sí. Los hechos serán las premisas.

- Observar lo que ocurre cuando no se mueven todas las variables que afectan al problema (por ejemplo mover las variables una a una, o por pares, etc.).

- Multiplicar los experimentos, cuando sea posible, realizándolos con la máxima precisión.

- Establecer las consecuencias en lenguaje matemático. Aplicar los recursos matemáticos en la transformación de las ecuaciones. Obtener el significado de las ecuaciones obtenidas, relacionándolas con la realidad.

En apariencia, el método experimental es el más revolucionario de todos los métodos pues conduce a sorprendentes descubrimientos e invenciones, pero es, al mismo tiempo, esencialmente conservador y cauteloso pues vacila en extraer conclusiones antes de que su validez no haya sido establecida y verificada de muchas maneras. Produce una evolución de incomparable magnitud, que nos da una idea del poder intelectual del hombre, pero es tan lenta y continuada como la que producen las fuerzas naturales.

El método experimental también tiene dos limitaciones fundamentales: Hay sectores del pensamiento donde puede resultar inaplicable, como el Arte, la Moralidad. Además, pueden ser aterradoras las consecuencias de su mala aplicación.

La unidad de la Humanidad incluye Oriente y Occidente, que son dos fases complementarias de la experiencia humana que se encuentran en el alma de todo artista que es más que un artista, y cuyo amor no se li-

mita a la belleza; se encuentran también en el alma de todo científico que ha llegado a la comprensión de que la verdad, por valiosa que sea, no es la totalidad de la vida, y que debe ser completada por la Belleza y el Amor.

El científico que no es demasiado orgulloso, que no adopta una actitud agresivamente *occidental*, sino que recuerda la componente de origen oriental de sus pensamientos, incluso de los más elevados, no se avergonzará de sus ideales, será más humano y un mejor servidor de la verdad.

Apéndice: CHINA E INDIA LA MATEMÁTICA PRIMITIVA EN CHINA

Se han hecho algunas referencias a la Matemática China e India en distintos períodos temporales. Eso hace difícil intercalarlas en el texto anterior por lo que dedicamos este Apéndice a resumir estas dos culturas matemáticas.

Las civilizaciones China e India son más antiguas que las de Grecia y Roma y, en general, menos que las que surgieron en los valles de Mesopotamia y del Nilo. Sin embargo, las civilizaciones que tuvieron su cuna en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo son comparables en edad a las que surgieron a lo largo del Nilo o entre el Tigris y el Eufrates. No obstante, los registros cronológicos en el caso de China son menos fiables que los que tenemos para Egipto o Babilonia.

Parece que no tiene fundamento científico la afirmación de que los chinos habían descrito los 12 signos del Zodiaco en el s. XV a.C. Los orígenes de la Civilización china se deben situar alrededor del año 1000 a.C.. El *Chou Pei Suan Ching*, considerado el texto chino más antiguo de contenido matemático, fue escrito por varios autores y, aunque no está clara su antigüedad, es un buen ejemplo de lo que era la Matemática china alrededor del 1200 a.C. Contiene cálculos astronómicos, una introducción a las propiedades del triángulo rectángulo y operaciones con fracciones. Está escrito en forma de diálogo entre un ministro que va explicando a su príncipe el fundamento

del calendario, indicándole que el arte de los números deriva del cuadrado, de origen humano, y del círculo, de origen divino. Revela que en China, igual que sucedió en Egipto, la Geometría nació de la Agrimensura. Como sucedió en Babilonia, la Geometría china se reducía a un ejercicio numérico de Aritmética o de Álgebra. También contiene indicaciones del *Teorema de Pitágoras* tratado algebraicamente.

Casi tan antiguo como el *Chou Pei Suan Ching* son *Los nueve capítulos sobre el Arte matemático*, que tiene 246 problemas sobre Agrimensura, Agricultura, Ingeniería, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

A diferencia de los libros griegos de esa época, que eran ya exposiciones sistemáticas con orden lógico, *Los nueve capítulos* repiten la costumbre de los babilonios y egipcios de coleccionar problemas concretos. *Los nueve capítulos* también recuerdan a la Matemática egipcia por el uso de la *Regla de la falsa posición*, si bien la utilización de este procedimiento, así como el origen de la Matemática china, parece ser independiente de influencias occidentales.

En el último problema del Capítulo 8 se plantea la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas, siendo el inicio del estudio de los sistemas indeterminados, que va a quedar como uno de los temas favoritos de los pueblos orientales. El interés por los sistemas de ecuaciones también está relacionado con la obtención de los *Cuadrados mágicos*, siendo

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Uno de los *Cuadrados mágicos* más antiguos conocidos.

En el Capítulo 9 aparecen problemas sobre triángulos rectángulos, preguntando determinar la profundidad de un estanque circular de 10 pies cuadrados de superficie, sabiendo que una caña que crece en su cen-

tro y se asoma exactamente un pie por encima del agua, alcanza exactamente la superficie si se la dobla hasta el borde del estanque. Otro problema dice que hay un bambú de 10 pies de altura que se ha roto de manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura.

La Cultura china vio dificultado su desarrollo por bruscas rupturas. En el año 213 a.C., el emperador chino ordenó la quema de libros salvo, tal vez, los de carácter técnico. Con dificultades sobrevivieron muchas obras con copias clandestinas.

Por otra parte, algún tipo de contacto existió de China con la India y el Occidente si bien el querer detectar una influencia babilónica o griega en China tiene la dificultad de que los chinos nunca usaron fracciones sexagesimales. El sistema de numeración chino fue esencialmente decimal con dos esquemas diferentes de notación:

- El multiplicativo, que utilizaba unos símbolos para los dígitos y otros símbolos para las potencias de 10. En este esquema el 459 se escribía el 4, seguido del símbolo del 100, 5, seguido del símbolo del 10, y el 9. Se trata de una representación en la forma $4 \times 100 + 5 \times 10 + 9$. Los símbolos estuvieron formados inicialmente por varillas. De esta forma los primeros dígitos se escribían así:

El seis se formaba añadiendo al uno una barra horizontal en la parte superior. Los potencias de 10 se representaban con rayas horizontales.

- El segundo esquema de notación fue el posicional, similar al nuestro, si bien era más centesimal que decimal. La utilización de un símbolo para el cero, igual que en Babilonia, tardó en aparecer. En una obra de 1247, aparece un símbolo redondo para representar al cero.

La época exacta en que apareció la numeración a base de varillas en China no se ha podido determinar, pero fue mucho antes de que se adoptase el sistema de numeración posicional en la India. Las varillas en el 300 a.C. no eran una simple notación para escribir los resultados de una computación, sino que los



Liu Hui

administradores llevaban consigo una bolsa que contenía una colección de varillas de bambú, marfil o hierro que utilizaban como instrumentos para hacer sus cálculos. Las varillas para contar las manejaban los chinos con tanta habilidad que un escrito del s. XI las describe "*volando con tal rapidez de un lado a otro que el ojo no podría seguir su movimiento*". Los números negativos no ocasionaron excesivas dificultades a los chinos acostumbrados a utilizar conjuntos de varillas rojas para representar los números positivos y negras para representar los números negativos. Sin embargo, no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser solución de una ecuación.

Los pasos algebraicos consistentes en cancelaciones de cantidades iguales se llevaban a cabo con más rapidez usando las varillas en una tabla de calcular que con el ábaco o marco de calcular rígido con bolas móviles a lo largo de barras paralelas. Probablemente hasta el s. VI no comenzó a utilizarse el ábaco en China. La palabra latina *abacus* deriva de la semítica *abq*, que significa polvo, lo que nos indica que en otros países, lo mismo que en China, el ábaco evolucionó a partir de una bandeja llena de polvo o de arena que se utilizaba como tabla de calcular. Sigue sin saberse si la aparición del ábaco en China, en Arabia y en Europa se debió o no a inventos independientes entre sí.

Además, los chinos conocían bien



Chuh Shih-Chieh

las operaciones con fracciones y hallaban el mínimo común múltiplo del denominador de varias fracciones, estableciendo, al igual que hacían con otras materias analogías con los distintos sexos, refiriéndose al numerador como “el hijo” y al denominador como “la madre”.

Más importante que esta curiosidad es la tendencia a la decimalización de las fracciones en China. En Mesopotamia el sistema de medidas, básicamente sexagesimal, condujo a la numeración sexagesimal. En China la adopción de una idea directriz decimal de pesos y medidas dio como resultado que se impusiera el hábito decimal en el manejo de fracciones desde, según parece, el s. XIV a.C. Prueba del dominio de la decimalización en el pensamiento chino es la utilización de las fórmulas

$$\sqrt{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \sqrt{10} \quad y \quad \sqrt{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \sqrt{10}$$

El uso del valor 3 para aproximar en la Matemática china primitiva puede revelar una cierta dependencia de la matemática china respecto a la Matemática de Babilonia, si bien parece claro que hasta el año 400, China exportó más Matemática de la que importó. La búsqueda de valores cada vez más exactos de π fue más persistente en China que en ningún otro sitio en los primeros siglos de la Era Cristiana. Este proceso produjo los valores $3,1547, \sqrt{10}, \frac{92}{29}$ y $\frac{142}{45}$ y en el siglo III, Liu Hui, importante comen-

tarista de los *Nueve Capítulos*, obtiene las aproximaciones 3,14 con un polígono regular de 96 lados y 3,14159 con un polígono de 3072 lados.

La fascinación que ejerció en los chinos el número π alcanzó su punto más alto en la obra de **Tsu Chung-Chih** (430-501) quien llegó a dar las aproximaciones 3,1415926, por defecto, y 3,1415927 por exceso.

Los problemas que trató la Matemática china parecen ser más pintorescos que prácticos. Sin embargo, la Civilización china produjo gran número de innovaciones técnicas. La utilización de la imprenta y de la pólvora (s. VIII), así como la del papel y la brújula marina (s. XI) fue anterior en China que en cualquier otro lugar. Luego vino en el s. XIII, la época más brillante de la Matemática china, coincidiendo con la última parte del período Sung.

En esta época había matemáticos trabajando en distintos lugares de China pero las relaciones entre ellos parecen haber sido escasas y, como sucedió en la Matemática griega, pocos de sus tratados han llegado hasta nosotros.

El último, y tal vez el más importante de los matemáticos Sung, fue **Chu Shih-Chieh**, que vivió, aproximadamente entre 1280 y 1303. Vivió cerca de Pekín, pero estuvo viajando casi toda su vida como un sabio errante que se ganaba la vida enseñando Matemáticas a pesar de lo cual encontró el tiempo y la tranquilidad suficientes para escribir la “*Introducción a los estudios matemáticos*”, libro elemental que también ejerció gran influencia en Corea y Japón, y el “*Espejo precioso de los cuatro elementos*”, donde los cuatro elementos, cielo, tierra, hombre y materia, representan las cuatro incógnitas de una ecuación. En este libro, Chu Shih-Chieh explica un método de transformación para ecuaciones, que le llamó *Método fan fa* y que, en Occidente, le conocemos como *Método de Horner*, matemático que vivió medio milenio más tarde. **Chu Shih-Chieh** para resolver con su *Método fan fa* la ecuación

$$x^2 + 252x - 5292 = 0$$

sigue estos pasos:

- Obtiene por tanteo que la solución está entre $x=19$ y $x=20$.

- Con la transformación $x = 19 + y$ obtiene la ecuación

$$y^2 + 290y - 143 = 0$$

que tendrá una raíz entre 0 y 1.

Como valor aproximado de esta ecuación toma

$$y = \frac{143}{1+290} \text{ de donde } x = 19 + \frac{143}{291}$$

LA MATEMÁTICA PRIMITIVA EN LA INDIA

Las excavaciones arqueológicas que se han realizado en Mohenjo Daro nos muestran la existencia de una vieja civilización con un alto nivel cultural en la India que fue contemporánea de los constructores de las grandes pirámides egipcias, pero no ha llegado hasta nosotros ningún documento matemático de aquella época lejana.

Un milenio más tarde, el país fue ocupado por los invasores arios que procedían de las altiplanicies de Irán e introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita.

Buda, el gran maestro religioso, enseñaba en la India por la época en que parece que **Pitágoras** visitó la India. Hay quien ha sugerido que Pitágoras aprendió el teorema que lleva su nombre de los hindúes si bien hay que indicar que los babilonios ya estaban familiarizados con el teorema en cuestión por lo menos mil años antes.

En la India, como en Egipto, los conocimientos matemáticos se fueron decantando de la planificación de templos, adoptando la forma de un cuerpo de conocimientos conocido como *los Sulvasutras* (= reglas de la cuerda, en recuerdo de las cuerdas utilizadas en las mediciones). Más aún que en el caso de China, las contribuciones importantes hindúes son aportaciones separadas por largos intervalos de tiempo.

De los *Salvasutras*, escritos en verso, se conservan tres versiones. La más antigua parece ser de la época pitagórica y los problemas que tra-

tan están relacionados tanto con los problemas de agrimensura egipcios como con el problema griego de duplicación del cubo. Se ha pretendido atribuir en el período de los *Salvasutras* (del s. VIII a.C. al siglo II de nuestra Era), y en la India, el primer reconocimiento de la existencia de los inconmensurables, lo que parece improbable por el desinterés o incapacidad de los matemáticos hindúes para enfrentarse con conceptos fundamentales.

Al período de los *Salvasutras*, que se cierra hacia el siglo II, le sigue la época de los *Siddhantas* o sistemas astronómicos, que parecen haber tenido relación con el relanzamiento o renacimiento de la Cultura sánscrita al comienzo de la dinastía del rey **Gupta** (hacia el 290). El único *Siddhanta* que se conserva completo es el “*Sistema del Sol*”, escrito en verso en estrofas épicas hacia el año 400. Las principales teorías astronómicas que contiene son griegas, mezcladas con *folklore* hindú. Los restantes *Siddhantas* parece que también eran tratados de Astronomía de contenido similar, escritos en verso sánscrito, con muy pocas explicaciones y sin ninguna demostración. Los autores hindúes defienden la originalidad de los *Siddhantas*, en tanto que los occidentales se inclinan a ver claros signos de influencia griega.

Por ejemplo, parece que el *Paulisha Siddhanta* proviene de la obra del astrólogo **Pablo** que vivió en Alejandría poco antes de la fecha presumible en que fueron compuestos los *Siddhantas* (de hecho el sabio árabe **Al-Biruni** atribuye este *Siddhanta* a Pablo de Alejandría). El *Paulisha Siddhanta* utiliza para π el valor $3\frac{177}{12502}$, que coincide esencialmente con el valor sexagesimal 3; 8, 30 de **Ptolomeo**.

Un hecho innegable es que los hindúes adquirieron sus conocimientos de Trigonometría del helenismo cosmopolita de Alejandría; otro que el material helénico tomó en sus manos una nueva forma que iba a ser muy significativa. La Trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre cuerdas y arcos o ángulos centrales. La Trigonometría hindú dividió

los ángulos mediante las bisectrices y estudió la relación entre la mitad de la cuerda y la mitad del arco o ángulo central.

Así nació en la India el antepasado de lo que hoy conocemos como *función seno*, lo que representa la contribución más importante de los *Siddhanta* a la Matemática. Aunque algún historiador ha formulado que esta transformación de la Trigonometría tuvo lugar en la Alejandría post-ptolomeica, de lo que no se tiene ninguna duda es que el mérito en la extensión de la utilización de la semicuerda como seno corresponde a los hindúes y no a los griegos. La palabra seno deriva del nombre hindú *jira* a través de una traducción árabe.

Durante el siglo VI, no mucho tiempo después de la composición de los *Siddhanta*, apareció el matemático **Aryabhata**, autor de *Aryabhata*, delgado volumen escrito en verso hacia el 499 que cubre diversos temas de Astronomía y Matemáticas.

Tanto *Aryabhata* como *Los Elementos* (escrito ocho siglos antes en Grecia) son recopilaciones de desarrollos anteriores realizados por un solo autor, pero entre las dos obras hay notables diferencias: *Los Elementos* constituyen una síntesis de la Matemática pura, expuesta con un alto

las técnicas de medición matemáticas, sin relación con la lógica o la metodología deductiva. Junto a reglas correctas de cálculo de áreas y volúmenes contiene otras incorrectas. Por ejemplo, dice bien la fórmula del área del triángulo y mal el volumen de la pirámide, para el que define la mitad del área de la base por la altura. Calcula correctamente el área del círculo, mediante la mitad del producto de la longitud de la circunferencia por el radio, y obtiene mal el volumen de la esfera, que lo define como el área del círculo máximo por la raíz cuadrada de su área. Contiene una regla siempre señalada por los historiadores hindúes de Matemática: “*Suma 4 a 100, multiplica por 8 y súmale 62000. El resultado te da aproximadamente la longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 20000*”. Equivale a aproximar π por 3,1416, que es el valor utilizado por **Ptolomeo**.

Algunas presentaciones de *Aryabhata* tienen lenguaje muy florido. Por ejemplo, el problema de obtener el cuarto proporcional a tres números dados lo expone así: “*En la regla de tres multiplica el fruto por el deseo y divide por la medida. El resultado será el fruto del deseo*”.

Realmente puede decirse que la obra de Aryabhata es una mezcla de

de la utilización del cero por los hindúes, dígito que faltaba introducir para simplificar y reducir a la forma actual la numeración posicional hindú

grado de abstracción, bien ordenada lógicamente y con objetivo pedagógico. El *Aryabhata* se compone de 123 estrofas métricas para suplementar las reglas de cálculo en Astronomía y

lo sencillo y lo complicado, a la vez que de lo correcto y lo incorrecto. El sabio árabe **Al-Biruni** caracterizaba, medio milenio más tarde, la Matemática hindú como una mezcla de vulga-

res guijarros y valiosos cristales, descripción que se ajusta al *Aryabhata*.

La segunda parte del *Aryabhata* trata de la medida y cálculo de tiempos y de Trigonometría esférica. Aquí aparece un elemento nuevo que iba a dejar huella en la Matemática de las generaciones futuras: el sistema de numeración posicional decimal, pues Aryabhata afirma que, de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede. La idea del valor posicional era un elemento esencial en el sistema de numeración babilónico y lo que los hindúes hicieron fue darse cuenta de que esta idea era aplicable al sistema de notación decimal que se estaba usando en la India.

El desarrollo histórico de las notaciones numéricas en la India parece haber seguido pasos análogos a los encontrados en Grecia: Las inscripciones del período cultural de Mohenjo Daro muestran la utilización de palotes reunidos en grupos. En la época de **Asoka**, s. III a.C., se seguía utilizando el principio repetitivo, pero se adoptaron nuevos símbolos para las unidades de orden superior cuatro, diez, veinte y cien. Gradualmente se fue pasando al descubrimiento de que los nueve dígitos servían para representar los múltiplos de diez. En esta economía pudo haber influido el sistema de numeración seudoposicional chino de barras.

La referencia específica más antigua a los números hindúes data del 662 y se encuentra en los escritos del obispo sirio **Severo Sebekt**. Como consecuencia del cierre de las escuelas filosóficas atenienses ordenado por **Justiniano**, algunos de sus sabios se trasladaron a Siria, establecieron centros donde cultivaban el saber griego y Sebekt, sintiéndose molesto por el desprecio que mostraban por la Cultura y el Saber no griegos, consideró necesario mostrar a los griegos la sabiduría de otros pueblos. Llamó la atención sobre los hindúes y sus "sutiles descubrimientos en astronomía, así como sus valiosos métodos de cálculo y sus operaciones que sobrepasan toda descripción, indicando que sus cálculos se hacen por medio de nueve signos".

De la utilización del cero por los

hindúes, dígito que faltaba introducir para simplificar y reducir a la forma actual la numeración posicional hindú, no tenemos noticia de su apari-

cifra. Para el seno de $3,75^\circ$, tanto el *Siddhantas* como el *Aryabhata* toman el número de unidades que contiene su arco, es decir $3,75 \times 60 =$

la referencia específica más antigua a los números hindúes data del 662 y se encuentra en los escritos del obispo sirio Severo Sebekt

ción hasta el año 876, más de dos siglos después de la aparición de los nueve dígitos en la numeración hindú. Su origen puede estar vinculado a Alejandría, con lo cual el mérito en la numeración actual de los hindúes habría estado en la reunión de elementos no descubiertos por ellos: la base decimal, la numeración posicional y la utilización del cero. Finalmente, las formas hindúes medievales de los diez dígitos son muy diferentes de las actuales, pero los principios teóricos del sistema de numeración estaban ya firmemente establecidos. Esta es la principal aportación hindú.

Junto con el sistema de numeración decimal, la otra gran contribución de la India a la historia de la Matemática fue la introducción de lo equivalente a la *función seno* en Trigonometría para reemplazar a las cuerdas griegas.

Las tablas más antiguas que nos han llegado de la *función seno* se encuentran en los *Siddhantas* y en el *Aryabhata*, donde se dan 25 senos de los ángulos menores o iguales a 90° que difieren cada uno del siguiente en $3,75^\circ$. Realizaban los cálculos de la siguiente forma: Tomaban una circunferencia de unidades y un radio de 3438 unidades. Esto supone considerar un valor de π que coincide con el de **Ptolomeo** hasta la cuarta

225. Traducido a lenguaje moderno, significa que, para ángulos pequeños, consideraban el seno igual a la medida del ángulo en radianes. La división de 225 unidades entre el radio (= 3438 unidades) da un valor muy aproximado al que consideramos actualmente para el seno de $3,75^\circ$.

Las restantes entradas, que en lenguaje moderno serían los productos de los senos de los restantes ángulos por 3438, los calculaban por la siguiente fórmula recursiva:

$$S_{n+2} = S_n + S_1 - R_n/S_1$$

donde S_n es el n -ésimo seno por 3438 y R_n es la suma de los n -ésimos primeros senos multiplicados por 3438.

La Trigonometría fue una herramienta auxiliar para la Astronomía tan útil como precisa. No conocemos cómo llegaron los hindúes a la fórmula recurrente para los senos, si bien pudo estar motivado por un desarrollo intuitivo o empírico del cálculo con ecuaciones en diferencias, así como de la práctica de la interpolación.

La Matemática hindú se la califica de "intuitiva" para ponerla en contraste con el severo *racionalismo* de la Geometría griega. Hay escasa evidencia en la India del estudio de problemas geométricos clásicos. En

nos encontramos con un grave problema dado que su cronología es muy insegura y que los autores hindúes raramente mencionan a sus predecesores

cambio, a los matemáticos hindúes les fascinaban las cuestiones numéricas relacionadas con las operaciones numéricas o con la resolución de ecuaciones determinadas o indeterminadas. La suma y la multiplicación se hacían en la India casi de la misma manera que hoy en día, salvo la diferencia de que escribían las unidades de menor orden a la izquierda, por lo que la suma y la multiplicación las hacían de izquierda a derecha. Utilizaban la disposición en celdillas para hacer la multiplicación, con lo que evitaban el tener que recordar las cifras que llevaban.

Nos encontramos con un grave problema dado que su cronología es muy insegura y que los autores hindúes raramente mencionan a sus predecesores y muestran una gran independencia en sus razonamientos matemáticos. Así ocurre, por ejemplo, con **Brahmagupta** (alrededor del 628) que vivió en la India central algo más de un siglo después de **Aryabhata**, con quien tiene muy poco que ver, ni siquiera geográficamente, pues Aryabhata había vivido en la región oriental de la India.

Brahmagupta menciona dos valores de π el "valor práctico" 3 y el "valor exacto", pero no menciona el valor más aproximado de Aryabhata. En la Trigonometría, que incluye su obra más conocida, el *Brahmasphuta Siddhanta*, adopta como radio de la circunferencia el valor 3270 en vez de 3438 de **Aryabhata**. Se parece a su predecesor en la mezcla indiscriminada de resultados correctos e incorrectos. Por ejemplo, **Brahmagupta** calcula el "área bruta" del triángulo isósceles multiplicando la mitad de la

base por uno de sus lados iguales y la de un triángulo escaleno la obtiene multiplicando la base por la semisuma de los otros dos lados. En cambio, para el área exacta utiliza la fórmula de **Arquímedes-Herón**. Un resultado muy bello de la obra de Brahmagupta es la generalización de la *Fórmula de Herón* para la obtención del área de un cuadrilátero

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

que sólo es cierta para el caso de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. El caso general precisa adición de un sustraendo, pues el área viene dada por

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd \cos^2 a}$$

donde a es la semisuma de dos ángulos opuestos del cuadrilátero.

Las contribuciones más importantes de Brahmagupta están en el marco del Álgebra. Se le deben las soluciones generales de las ecuaciones cuadráticas, incluyendo las dos raíces, aunque una de ellas sea negativa. También se le debe la primera exposición sistemática de la Aritmética de números negativos, dando reglas operativas para números enteros, positivos o negativos, con el fallo de admitir que $0 : 0 = 0$. Su contribución fue muy brillante en el Análisis indeterminado, siendo el primero que resolvió la ecuación diofántica lineal $ax + by = c$, con a , b y c enteros.

Mérito innegable de la Matemática hindú fue considerar como números las raíces irracionales de otros números, lo que supuso una gran ayuda

para el Álgebra, que fue fruto de una inconsciencia de tipo lógico más que de una profundidad matemática.

Los matemáticos hindúes carecieron de una distinción clara entre resultados exactos e inexactos. En consecuencia, era natural que no tomaran en consideración las diferencias entre magnitudes conmensurables e incommensurables. No tenían ningún impedimento en aceptar los números irracionales, camino que siguieron las siguientes generaciones hasta que, en el s. XIX, los matemáticos consiguieron fundamentar el sistema de los números reales sobre una base sólida.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- 1.- BABINI, J. *Historia sucinta de la matemática*. Espasa Calpe, 1952.
- 2.-BOYER, C. B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, 1968.
- 3.- DIEUDONNÉ, J. *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Editorial, 1989.
- 4.- GARCIA BARRENO, P. *La Ciencia en tus manos*. Espasa Fórum. Espasa Calpe, 2000.
- 5.- HOFFMANN, J. E. *Historia de la matemática*. UTEHA, 1960.
- 6.-Le LIONNAIS, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, (Eudeba, Buenos Aires, 1962)
- 7.-MARAVALL, D. *Filosofía de las matemáticas*. Dossat, 1961.
- 8.- MARAVALL, D. *Grandes problemas de la Filosofía Científica*. Editora Nacional, 1973.
- 9.- RUSSELL, B. *Historia de la Filosofía occidental* (Colección Austral, Madrid, segunda edición, 1997).

BIBLIOGRAFÍA ESPECIALIZADA

- 1.- AITON, E. J. *The application of the infinitesimal calculus to some physical problems by Leibniz and his friends*, 300 Jahre "Nova methodus" von G.W. Leibniz (1864 – 1984)(Wiesbaden, 1986), 133 – 143.
- 2.-ANDRADE, E.N. da C. *Newton and the science of his age*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 181 (1943), 227 – 243. ■