MATEMÁTICAS Y ORDENADORES EN EL CONOCIMIENTO DEL MUNDO* (y Parte II)

Manuel López Pellicer
E.T.S. de Ingenieros
Agrónomos de Valencia

LAS MATEMÁTICAS Y LAS TRANSFORMACIONES ENERGÉTICAS

Los procesos irreversibles del Universo producen deterioro de manera indeleble. *"La vida sería infinitamente más feliz,* se lamentó **Max Twain**, *si pudiésemos nacer a los ochenta y acercarnos gradualmente a los dieciocho".* **Newton** llegó a creer que el Universo tendría cierta reversibilidad al observar los giros de los planetas o los movimientos periódicos de los péndulos que van y vuelven. Parece que llegó a pensar que el Universo sería un *perpetuum mobile* destinado a existir para siempre. Esta idea se cuestionó a finales del siglo XVIII al descubrir la irreversibilidad de ciertos fenómenos, pues, por ejemplo, el calor siempre fluye de forma natural del foco caliente al frío y nunca al revés. La fricción transforma el movimiento en calor y nunca al contrario. Estas cuestiones científicas pronto se vieron mezcladas con las más profundas conjeturas filosóficas pues la irreversibilidad suponía un envejecimiento del Universo.

Carnot (1822-1888)

Ernst Carl Gottlieb Clausius, devoto clérigo protestante, no confiaba en el éxito del hombre en desvelar los misterios de la Creación y de nuestra mortalidad. El 2 de enero de 1822 tuvo su decimocuarto hijo, al que llamaron **Rudolf Julius Emmanuel**.

Ese mismo año, en París, el joven ingeniero **Sadi Carnot** publicaba su obra *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego* en la que observaba que las máquinas de vapor eran capaces de hacer lo que la Naturaleza no podía hacer: convertir el calor en movimiento. A **Carnot** le dolía que las máquinas de vapor inglesas fueran más eficientes que las francesas, pues, a idénticas cantidades de combustible, producían más trabajo.

Clausius aprendió en el **Instituto de Stettin** cómo la máquina de vapor transformaba el calor en trabajo y que en el centro de la Tierra había una máquina lo suficientemente poderosa para haber esculpido el mundo natural. En 1840, entró en la **Universidad de Berlín**. Tras oír contar a su profesor de Física, **Gustav Magnus**, que había descubierto que el calor corporal se produce en unas reacciones químicas complejas y no en los pulmones (como hasta entonces se había pensado) le pareció que sería fascinante dedicarse al estudio del calor. En 1843, **Clausius** se había ganado el respeto de sus profesores y compañeros pero la muerte de su madre en el parto del decimoctavo hijo cambió sus planes.

Decidió que no deseaba que sus gastos recayesen sobre la familia por lo que aceptó un empleo de tutor a tiempo parcial y se ofreció voluntariamente para educar a sus hermanos más pequeños, pensando que así sufrirían menos la pérdida de su madre. Con todo este trabajo, consiguió terminar sus estudios de primer ciclo en la **Universidad de Berlín**, completando luego en la **Universidad de Halle** el ciclo superior, donde había llegado a un acuerdo con sus profesores para asistir a las clases más importantes y así poder estar más tiempo en Berlín al cuidado de sus hermanos.

Al joven **Clausius** le cautivaban los comportamientos antinaturales. Le entusiasmaba, por ejemplo, que los chinos hubiesen descubierto un dispositivo que obligaba al calor a pasar del foco frío al caliente. Se sentía atraído por la vida de **Carnot**, quien habría observado que las máquinas

Clausius (1822-1888)

de vapor eran la antítesis de la fricción y estaba ansioso por leer el libro *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego*, principal obra de **Carnot**. No pudo completar su deseo debido a que **Carnot** murió en 1823 por el cólera, ordenando el inspector de Salud la quema de todas sus pertenencias personales incluyendo los papeles. Sí pudo conocer de segunda mano los resultados de **Carnot**. Particularmente le sorprendió el que una máquina para funcionar necesitase dos focos de calor a diferente temperatura, siendo el trabajo producido proporcional a la diferencia de temperaturas, y que el trabajo producido

• De la Rev. Real Academia. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Vol. 97, nº 2, 2003.

era una pequeña parte de la energía consumida. En 1848, además de preocuparse de las cuestiones anteriores, empezaba a pensar sobre el destino del Universo. Conoció la entonces controvertida teoría de **Mayer** que, en cierta forma, venía a decir que la energía total del Universo permanece constante, así como los experimentos de **Joule**, quien, impresionado por los descubrimientos de **Faraday**, había comprobado que el paso de la corriente eléctrica por un alambre lo calentaba. **Clausius** vio en los experimentos de **Joule** la base fáctica y en las ideas de **Mayer** la base filosófica para elaborar una nueva

Mayer (1723-1762)

teoría del calor. Lo único que faltaba era tejerlas en el *telar de las Matemáticas*, lo que le llevó dieciocho años y daría el mejor fruto de su actividad intelectual.

En 1850, publicó un largo artículo titulado *"Sobre la fuerza motriz del calor y sobre las leyes que pueden deducirse de ella para una teoría del calor"*, donde planteaba que calor y trabajo son formas de la energía, de la que había diferentes manifestaciones (energía solar, eléctrica, acústica...). Formuló en términos matemáticos que la energía del Universo, si bien se transforma de unos en otros tipos, se mantiene constante, con la ecuación

Boltzman (1844-1906)

$$\Delta t_{Universo} = y$$

que dice que la variación de la energía del Universo es cero.

Clausius había terminado con la teoría del calórico, que consideraba al calor como un fluido. Claramente había puesto de manifiesto que el calor era una forma de energía que podía transformarse en otras formas de energía, como el trabajo. En el proceso de transformación una parte se malgastaba no produciendo trabajo. El mundo científico se rindió ante **Clausius**, quien, según **Thomson**, *mediante razonamiento matemático había llegado a conclusiones muy notables.*

Clausius se propuso avanzar más y nos hizo ver que vivimos en un Universo que conserva la energía, pero no la aprovecha con eficiencia. Para ello probó que las transformaciones están gobernadas por una misteriosa ley de aumento de la entropía. Cuando se llegue al máximo de entropía, se producirá la muerte térmica del Universo, consistente en un Universo uniformemente tibio, producido por el paso de la energía de las zonas calientes a las zonas frías. Sin zonas calientes o frías, el calor cesaría de fluir, lo que significaría que ninguna máquina podría funcionar.

En 1877, **Boltzman** demostró *matemáticamente* que la entropía era una medida del desorden, lo que suponía que el Universo debía haber empezado con una tensión máxima y como algo muy bien organizado. Como si alguien, hace millones de años, hubiese construido un reloj de cuerda soberbiamente diseñado y le hubiese dado toda la cuerda posible. Con el paso del tiempo, el reloj irá cada vez más despacio, perdiendo cuerda, relajándose lentamente, descomponiéndose cada vez más.

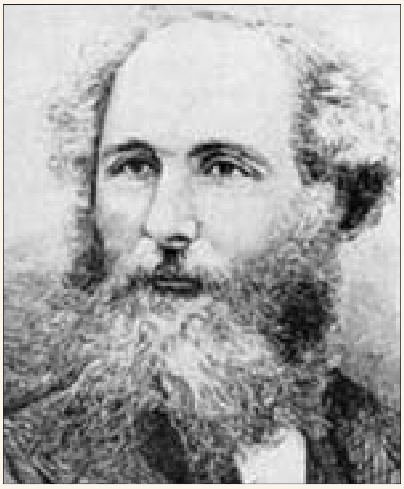
Maxwell (1831-1879)

LAS MATEMÁTICAS Y LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

Para **Newton** la luz consistía en diminutas partículas. Las grandes se asociaban con los colores más fuertes, rojos y amarillos, y las pequeñas con los más débiles, azules y violetas. **Thomas Young**, médico y científico aficionado nacido en Londres en 1773, se atrevió a sugerir que la luz consistía en ondas y no en partículas. El ojo veía rojas la ondas de menor frecuencia y violetas las de mayor frecuencia. En 1799 y después de algunos experimentos, que parecían confirmar su teoría, decidió llevar su propuesta a la **Real Sociedad** de Londres, uno de cuyos miembros, **Henry Brougham**, expuso que carecía de mérito y por ello se desechaba. No obstante, cada vez había más pruebas a favor de la teoría ondulatoria de la luz, por lo que, cuando murió en 1829, eran muchos los científicos que creían en dicha teoría.

Además, **Maxwell** había descubierto que sus ecuaciones sobre electricidad y magnetismo predecían la existencia de ondas electromagnéticas que viajaban a 300.000 km/s. Esa era la velocidad de la luz y **Maxwell** dio el salto a la conclusión, confirmada luego por **Heinrich Hertz**, de que sus ondas electromagnéticas y las ondas luminosas de **Young** eran la misma cosa.

A lo largo del siglo XIX se impuso la teoría ondulatoria electromagnética de la luz de **Young** y **Maxwell**, con el inexplicable problema de aclarar cómo viajaban las ondas electromagnéticas por el vacío, lo que nos haría saber cómo nos llega la luz de las estrellas. Dado que las ondas sonoras no son capaces de viajar por el vacío (no oímos un reloj dentro de una campana en la que se haya hecho el vacío), se llegó a la conclusión de que las ondas luminosas viajaban por un medio material que lo llenaba todo, que no era fácilmente detectable y que denominaron *éter*.



Maxwell (1831-1879)

En 1881, **Michelson** y **Morley** pensaron que, dado que la Tierra gira alrededor del Sol a 30.000 m/s era de esperar que causara una estela medible de *éter* si el *éter* existiese. Se propusieron medir la velocidad de la luz en los dos sentidos opuestos que corresponden al desplazamiento de la Tierra en su giro alrededor del Sol. Existiría el éter si un rayo se moviese más deprisa que el otro. Los resultados, repetidos durante veinte años, siempre revelaron que la velocidad de la luz era la misma en las dos direcciones. La conclusión era obvia: Las leyes de la Física tenían algún fallo o había que prescindir de la teoría ondulatoria de la luz.

Por otra parte, hemos indicado que en 1831 **Faraday** había probado que un imán en movimiento era capaz de originar una corriente eléctrica a través de un cable cercano. Innumerables experimentos posteriores probaron que también se producía electricidad si se mueve el cable y el imán está quieto. En otras palabras, el movimiento es relativo y no absoluto.

Einstein fue quien prescindió de la noción de espacio y tiempo absoluto, cualidades que en su Universo son relativas, pues, cuanto más deprisa se viaje, menos serán las percepciones de un centímetro y de un segundo. El factor de disminución sería $\{ 1 - v^2/c^2\}^{1/2}$. Sin embargo, lo único que no se modifica es la velocidad de la luz, en la que están de acuerdo los diferentes observadores. Es una noción absoluta para **Einstein**.

Esa aparente distinción de la Naturaleza respecto a las ondas electromagnéticas habría que buscarla, según **Einstein**, en el repetido fracaso de **Michelson** y **Morley** en encontrar el hipotético éter. Con pragmatismo afirmó que el éter no existía y que las ondas electromagnéticas eran capaces de abrirse paso por enormes trechos de espacio vacío, debido a que eran ondas con energía pura y sin masa.

Einstein (1879-1955)

Dando vueltas a su teoría, encontró que el factor de disminución afectaba en forma inversa a otras dos magnitudes muy relacionadas; la masa y la energía. Cuando aumenta la velocidad de una persona, su masa y su energía no disminuyen sino que aumentan en una cantidad inversa al factor de disminución. Por ello, la masa y la energía de una persona que viajara a velocidad cercana a la de la luz aumentarían muchísimo, superando a cualquier cantidad imaginable a medida que la velocidad se acercase a la de la luz. Por tanto, ningún objeto material puede viajar a la velocidad de la luz.

Finalmente, concluyó **Einstein** que masa y energía eran indistinguibles e intercambiables, como dos manifestaciones de un mismo ente, lo que recordaba la estrecha relación entre electricidad y magnetismo. Si la masa **m** aumenta en v su velocidad, se tiene que la nueva masa será

$$\frac{m}{(1 - v^2 / c^2)^{1/2}}$$

Para pequeños valores de v/c la expresión anterior se puede aproximar por

$$m + \frac{1/2 \; mv^2}{c^2}$$

de lo que concluyó que la variación de masa es el cociente entre la energía cinética perdida y c^2, gracias a la utilización de la aproximación del desarrollo de **MacLaurin** de $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Por tanto, si una masa m se transformase totalmente en energía se tendría la relación:

$$\text{Energía} = mc^2$$

La comprobación de esta ecuación se pudo hacer después de muchas horas de trabajo, estando la clave del éxito en el descubrimiento de la radioactividad por **Becquerel** muy a principios del siglo XX, pero sólo a principios de la década de los años 30 se pudo echar una mirada al mundo subatómico y observar que cuando un núcleo radioactivo perdía una partícula, siempre su disminución de masa era superior a la masa de la partícula emitida. Era evidente que una partícula al escapar robaba una parte de la masa del núcleo que se transformaba en energía, de acuerdo con la ecuación de **Einstein**.

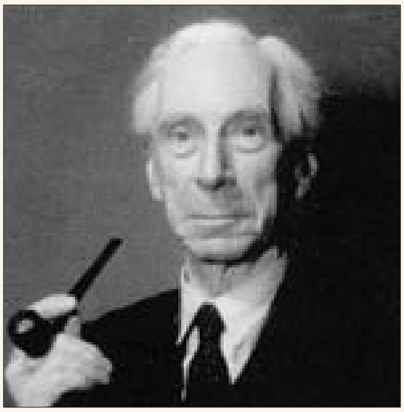
En 1934, hubo otra comprobación espectacular de la ecuación de **Einstein**, obtenida al romper el inestable núcleo del uranio bombardeándolo con un neutrón. La energía obtenida por transformación de parte de masa del núcleo en energía fue enorme, incomparablemente mayor que la obtenida en la combustión. Pero ni el italiano **Fermi**, ni la pareja de los **Curie**, ni los alemanes **Hahn** y **Strassmann** se dieron cuenta de lo que habían conseguido. Hasta 1939, los físicos no comprendieron su alcance, pero entonces el mundo estaba centrado en otras tensiones provocadas por las intenciones expansionistas de Alemania, Italia y Japón. Lo no previsible era que la nueva fuente de energía se iba a utilizar como elemento de destrucción, que tal vez evitó una guerra más larga pero que, en cualquier caso, sólo se debería utilizar en provecho del desarrollo de la Humanidad.

Whitehead (1861-1947)

MATEMÁTICAS, ORDENADORES Y RAZONAMIENTO FORMAL

Otro de los problemas planteados por **Hilbert** en 1900 era el obtener un sistema de razonamiento que permitiese deducir automáticamente la verdad o falsedad de cualquier proposición. Recordaba el sueño medieval y de **Leibniz**, conocido como encontrar la Combinatoria Universal. Hacía poco que **Russell** y **Whitehead** habían publicado Principia *Mathematica*, pretendiendo probar que la Matemática se deduce de un conjunto finito de axiomas. **Hilbert** quiso dar un paso más invitando a buscar un procedimiento formal, que se podría automatizar con una máquina y que, aplicado a una proposición matemática, discerniría su verdad o falsedad.

Después de tres décadas, llegó lo que nadie imaginaba: el sueño de **Hilbert** era lógicamente inalcanzable. En efecto, **Gödel** probó que ningún sistema axiomático formal que contenga a la Aritmética elemental puede ser consistente y completo. Consistente significa que el sistema formal no debe dar resultados contradictorios. Completo indica que el sistema formal debe poder aplicarse a todas las proposiciones posibles.



Russell (1872-1970)

El hallazgo de **Gödel**, conocido como *Teorema de Gödel*, obligó a los matemáticos a aceptar que siempre existirán cuestiones irresolubles ya que, si se elaborase un sistema lógico que abarcase toda la Matemática, se podría demostrar que algunas proposiciones serían, a la vez, verdaderas y falsas, es decir, indecibles en el lenguaje ordinario. Por otra parte, un sistema libre de contradicciones no se puede aplicar a todas las proposiciones matemáticas.

La conclusión de **Gödel**, calificada por **Penrose** como uno de los mayores logros del siglo XX, era impensable cuando se obtuvo ya que parecía incompatible que, durante varios siglos, se hubiese dado un prodigioso paralelismo entre el avance de las Matemáticas y el conocimiento del mundo físico y que, de pronto, pareciesen existir limitaciones para elaborar un sistema formal que contuviese toda la Matemática, lo que limita la capacidad de las Matemáticas para representar la realidad. La causa que impide hallar un sistema formal de

Gödel (1906-1978)

las Matemáticas que sea consistente y completo (abarcándolo todo sin contradicción) sigue sin resolverse. **Penrose**, sin argumentar razones, ha sugerido que esta incapacidad de decisión matemática se puede deber a una intervención, hasta ahora inadvertida, de la Mecánica cuántica, con todas sus incertidumbres, en el funcionamiento del cerebro al nivel de las neuronas.

En cualquier caso, **Gödel** ha establecido unas limitaciones, de las que tampoco nos pueden liberar los ordenadores pues, alrededor de 1930 y diez años antes de la aparición de los primeros ordenadores electrónicos, un pequeño grupo de matemáticos empezó a predecir cómo funcionarían. Uno de ellos, **Alan Turing**, matemático, trabajaba en la **Universidad de Cambridge** y se hizo famoso descifrando mensajes del mando alemán durante la II Guerra Mundial. En 1936, desarrolló muchos de los conceptos que más tarde se aplicaron a los ordenadores actuales. Menos clara es la naturaleza del ordenador que tenemos en nuestra cabeza, del que se está empezando a descifrar los algoritmos empleados en los circuitos neuronales más simples.

En los años 30 ya estaba claro que los ordenadores sólo resultarían útiles si se les incorporaban conjuntos de instrucciones, llamados *programas*, con los que se pudieran procesar datos. Un programa es un conjunto de procedimientos para realizar operaciones con los datos que se suministran (la entrada o *input*) para obtener un resultado (salida u *output*). Un programa puede ser grande, pero debe ser finito pues, de lo contrario, nunca se terminaría el proceso y el aparato nunca daría resultados.

También estaba claro en 1936 que los mejores programas serían los recursivos, que indicarían a la máquina que repitiese un conjunto de ins-

Turing (1912-1954)

trucciones. Así es como aprendimos a sumar: Primero las unidades, luego las decenas, y así sucesivamente, teniendo en cuenta que en alguna de esas sumas puede aparecer una unidad de orden superior que se debe incorporar en la representación final de la suma. Otro proceso recursivo es dividir restando sucesivamente el divisor.

La forma en que aprendemos a sumar tiene un problema grave cuando se suman números grandes: Empezamos sumando las unidades, luego las decenas y así sucesivamente, con lo cual empezamos por las cifras menos importantes. Sería más racional empezar al revés, es decir de izquierda a derecha, así las primeras cifras obtenidas serían las más importantes. Se tendría que rectificar cuando la suma de dos unidades de un orden diese una unidad del orden siguiente. En algunas ocasiones tendríamos que hacer muchas rectificaciones. Por ejemplo, en el último paso de la suma de 899.999.999 y 100.000.001 tendríamos que rectificar todas las cifras ya halladas.

Turing llegó a la conclusión de que una máquina de cálculo (lo que hoy llamamos ordenador) debe tener un medio de absorber datos, corregir los resultados provisionales obtenidos en las sucesivas etapas de cálculo y poder representar los resultados, siendo imprescindible que el número de etapas del proceso sea finito. La máquina no podría dividir por cero, pues las restas sucesivas de 0 dejan invariable el dividendo.

Turing llamó *Máquina universal* a su máquina de cálculo. Hoy se la conoce como *Máquina de Turing*. Analizó sus potencialidades y sus limitaciones, prediciendo el *Problema de la interrupción*, consistente en que su calculadora universal dejaría de imprimir números en alguna etapa de sus operaciones, bien por error en el diseño del algoritmo o por dificultad en calcular el siguiente dígito o por encontrarse con un problema insoluble. El problema de la interrupción está relacionado con el *Teorema de Gödel*.

Las Matemáticas son un medio para sacar conclusiones de suposiciones previamente formuladas, con la utilización de unas reglas de inferencia y la admisión de unos axiomas, que **Euclides** definía como lo evidente por sí mismo. Si se cambian los axiomas, varían las conclusiones obtenidas. Por ejemplo, en la Geometría euclidiana, que se ocupa de las figuras que solemos utilizar, la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados y se definen como paralelas las rectas de un plano que no se cortan. Hacia 1840, se suavizó este axioma permitiendo que dos líneas se considerasen paralelas si no eran idénticas y si ambas eran perpendiculares a otra línea, como sucede con los meridianos que son perpendiculares al Ecuador de la Tierra, dando lugar al nacimiento de una nueva Geometría en la que los tres ángulos de un triángulo no suman 180 grados.

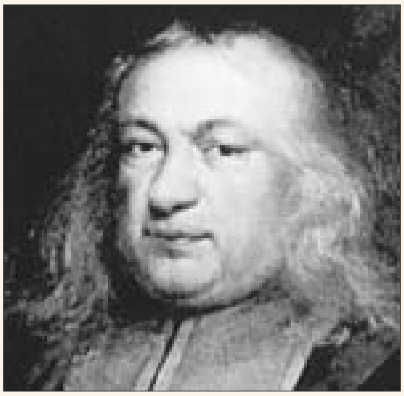
El éxito de las Matemáticas, al anticiparse a las necesidades de los físicos del siglo XIX se debió a que, durante casi dos siglos, los matemáticos basaron sus sistemas lógicos en axiomas sugeridos por los principios físicos, lo que motivó que uno e los mensajes de la conferencia de **Hilbert** en 1900 es que las Matemáticas se habían convertido en un instrumento fundamental para comprender cómo es el mundo.

MATEMÁTICAS, ORDENADORES Y EL PROBLEMA DE FERMAT

Los problemas enumerados por **Hilbert** en 1900 han marcado parte de la investigación del siglo XX. Uno no resuelto era el último Teorema de **Fermat**, quien en el siglo XVII había asegurado que *"con números enteros $\boldsymbol{a}^n$, $\boldsymbol{b}^n$ y $\boldsymbol{c}^n$ no es posible encontrar potencias enteras a^n y b^n cuya suma sea c^n, para n>2"*. Los ordenadores permitieron comprobar que no existen enteros no nulos **a**, **b** y **c** tales que $\mathbf{a^n + b^2 = c^n}$, cuando $2 < n < 100.000$.

Pierre de Fermat fue un Consejero del Parlamento de Toulouse, que vivió en la primera mitad del siglo XVII y era muy conocido por sus investigaciones matemáticas en teoría de números. **Fermat**, en el margen de un ejemplar del libro *Aritmética*, escrito por **Diofanto de Alejandría** en el siglo II d.C., escribió: *"No es posible encontrar dos cubos cuya suma sea un cubo, dos potencias cuartas cuya suma sea una potencia cuarta, más generalmente dos potencias cuya suma sea una potencia del mismo tipo. He encontrado una demostración maravillosa de este hecho que no cabe en el tamaño del margen"*. La anotación aparece en la página en que **Diofanto** trata el problema de encontrar tripletas de **Pitágoras**, que son ternas de números que pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, de las que hay infinidad de soluciones, (3, 4, 5), ((5, 12, 13), ..., ya descritas en los *Elementos* de **Euclides**. La nota de **Fermat** la publicó póstumamente su hijo.

Fermat era miembro de un grupo de científicos organizado alrededor del jesuita **Mersenne** y enviaba muchas cartas que contenían afirmaciones sobre propiedades de los números enteros, que la mayoría fueron demostradas por matemáticos del siglo XVIII (**Euler, Lagrange, Lamé, Dirichlet**).



Fermat (1601-1665)

A principios del siglo XX, todas las afirmaciones de **Fermat** habían sido ya demostradas, salvo la que hemos descrito de que no existen enteros no nulos x, y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ no es un entero mayor que 2, conocida como *"el último teorema de Fermat"* y resuelta por **Andrew Wiles** en 1994. Los dos últimos siglos están llenos de intentos fallidos de resolver en Z la ecuación $x^n + y^n = z^n$, para n>2, muy ligados al desarrollo de las Matemáticas en estos siglos. **Wiles** en su trabajo hizo uso de la mayoría de las herramientas desarrolladas en Teoría de Números, Álgebra y Geometría en los dos últimos siglos, y, en particular los resultados obtenidos en los últimos cuarenta años sobre curvas elípticas.

Consideremos la curva elíptica $y^2 + y = x^3 - x$. Si p es un número primo sabemos que Z/p, cociente de los números enteros Z respecto a la relación *"dar el mismo resto al dividir por p"*, sólo tiene p elementos, que los podemos representar por 0, 1, 2, ... y p – 1. En Z/2 nuestra curva elíptica tiene cuatro soluciones, (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1), lo que resulta fácil de comprobar dado que Z/2 es un conjunto finito. En Z/3 tiene seis soluciones la curva considerada. Si para cada número primo p = 2, 3, 5, ... llamamos N(p) al número de soluciones de $y^2 + y = x^3 - x$, en Z/p se tiene que

$$2 - N(2) = -2$$
$$3 - N(3) = -3$$
$$5 - N(5) = -2$$
$$7 - N(7) = -1$$

y estos números son los coeficientes de los términos de índice primo de la serie

$$f(z) = w - 2w^2 - 3w^3 + 2w^4 - 2w^5 + 6w^6 - w^7 + \ldots$$

siendo $w = e^{2\pi iz}$. La función f(z) es muy conocida y verifica

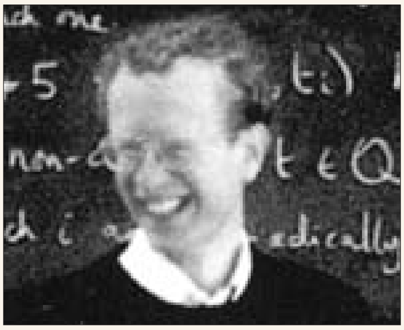
$$f(z) = (cz + d)^{-2} f[(az+b)/(c2+d)]$$

donde c es múltiplo de 37 y ad–bc=1.

En general, las funciones

$$F(z) = (cz + d)^{-k} f[(az+b)/ex+d)]$$

con c múltiplo de un número M y ad – be = 1 se llaman *funciones modulares* de peso k y nivel M. El hecho curioso que liga los números p – N(p)



Wiles (1953-)

de las curvas elípticas con coeficientes del desarrollo de las funciones modulares fue estudiado por **Taniyama**, **Shimura** y luego por **A. Weil** y otros matemáticos, llegando a conjeturar que:

Lamé (1795-1813)

*"Dada una curva elíptica **E** y sus números $c_p = p - N(p)$ existe una función modular **f(z)** de peso 2 y nivel **M**, dependiente de la curva, tal que*

$$f(z) = w + c_2w^2 + c_3w^3 + \ldots$$

donde $w = e^{2\pi iz}$. ".

Es claro que $3^2 + 4^2 = 5^2$ equivale, por el teorema de **Pitágoras**, a la construcción de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Dado que no se puede construir un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 6, se deduce que es falsa la relación $3^2 + 4^2 = 6^2$. **Frey** intuyó que, si existiesen números enteros no todos nulos **a**, **b**, **c** y **n** con **n** primo mayor que 2, tales que $a^n + b^n = c^n$, entonces la curva elíptica $y^2 = x(x + a^n)(x - b^n)$ no cumpliría la conjetura de **Taniyama** – **Shimura** – **Weil**. La prueba de esta intuición la hizo **Ribet** en 1987 siguiendo el camino sugerido por **Serre**.

Por tanto, la solución del último problema de **Fermat** vendría de la demostración de la conjetura de **Taniyama** – **Shimura** – **Weil**, o, al menos, de la prueba de dicha conjetura para las curvas elípticas determinadas a partir de una hipotética solución del último problema de **Fermat**. Justamente esto es lo que probó **Andrew Wiles** en 1995, después de siete años de trabajo.

Euler (1707-1783)

Hemos dicho que los ordenadores habían comprobado el último teorema de **Fermat** cuando 2<n<100.000. **Wiles** hizo lo que ningún ordenador hubiese podido hacer: comprobar el último teorema de **Fermat** para n>2, sin ninguna otra restricción.

PROBLEMAS COMPLEJOS

Gödel y **Turing** no han sido los únicos que han hecho dudar de la impresión generalmente compartida de que las Matemáticas, por su elegancia y capacidad de explicación, son una de las elaboraciones humanas intelectualmente perfectas. En efecto, desde hace tiempo la Matemática se enfrenta a problemas engorrosos, con sorpresas, casi siempre presentes cuando las ecuaciones no son lineales.

Si, por ejemplo, se considera la oscilación de un peso suspendido de un muelle vertical tal que la fuerza ejercida por el muelle es proporcional al desplazamiento relativo, no tendremos ninguna dificultad en encontrar cómo varía el desplazamiento con el tiempo. Si la longitud del muelle se multiplicase por **k**, se tendría que la oscilación también quedaría multiplicada por **k**, por lo que se dice que estamos ante un problema lineal. Pero si el peso choca con algún obstáculo cuando se desplaza cierta distancia, entonces el determinar el desplazamiento en función del tiempo es un problema que ha perdido la linealidad y es mucho más difícil.

Dirichlet (1805-1859)

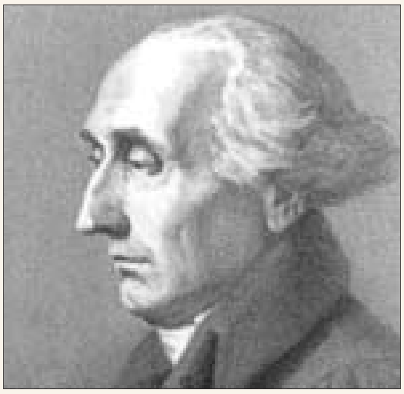
Los matemáticos empezaron a encontrarse con dificultades de este tipo cuando intentaron aplicar la teoría gravitatoria de **Newton** para predecir con más exactitud la posición de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra, teniendo en cuenta el efecto perturbador de la atracción del Sol. A principios del siglo XVIII, los matemáticos no estaban seguros de si las dificultades que encontraban para resolver este problema se debían a que sus técnicas de cálculo eran muy nuevas. A finales de siglo se habían convencido de que el problema no tenía soluciones exactas y que era preciso hacer aproximaciones numéricas. Las argumentaciones del siglo XVIII están recogidas en la obra *Mecánica Analítica* de **Lagrange**.

En realidad, casi todos los problemas prácticos que se plantean en el mundo real son no lineales. Encontramos, otra vez, el problema de los tres cuerpos en el *modelo* que describe el movimiento de un electrón en un átomo o en una molécula. Aunque tengamos un átomo de helio, el movimiento de un electrón está sometido a la atracción del núcleo y a la repulsión del otro electrón. También es un triunfo que se hayan encontrado varias soluciones exactas a las ecuaciones de la *Teoría General de Relatividad* de **Einstein** (Teoría de la gravitación) de carácter claramente no lineal, ya que las ecuaciones parecen simples, pero la cantidad de masa o de energía en cierto punto del espacio depende de complicadas derivaciones en otros puntos del espacio.

La no-linealidad ha atraído la atención de muchos de los mejores matemáticos del mundo. La dificultad más grave es que la falta de métodos generales de solución ha llevado al desarrollo de los métodos aproximados, que pueden dejarse soluciones importantes, dando sorpresas más o menos agradables.

Por ejemplo, las ecuaciones no lineales que representan las ondas que se pueden generar en la superficie de una masa líquida dan como solución las familiares ondas repetitivas y también el movimiento de una sola distorsión sobre la superficie de una masa líquida, consistente en un único abultamiento en la superficie que se propaga en una dirección, fenómeno llamado onda solitaria o solitón, que es algo más que una mera curiosidad matemática.

Los físicos de partículas se dieron cuenta muy pronto de que los solitones pueden servir como modelos del movimiento de partículas a través del espacio vacío. En 1962, **Skyrme** ideó un método para describir por medio de solitones las partículas de la materia nuclear. Ahora aparecen frecuentes referencias a partículas llamadas *skyrmiones*. De este modo se representan las ondas de choque generadas por explosiones. Se suele aceptar que la esfera expansiva de radiación energética y movimiento de partículas generada por la explosión de una supernova es un solitón. También se utilizan los solitones en la representación de los electrones atrapados cerca de las superficies sólidas, problema importante en la fabricación de semiconductores. No sería de extrañar que la señal eléctrica que recorre el axón de una neurona fuese también un solitón.



Lagrange (1736-1813)

Los solitones aparecen a veces en desembocaduras de ríos durante las mareas muertas, cuando la gran cantidad de agua que penetra en el estuario puede generar un solitón que recorre varios kilómetros tierra adentro.

Desde los años 70 se han ido observando cada vez más fenómenos no lineales, que podrían tener mucha importancia para las Matemáticas y la Ciencia en general. Se ha observado que ciertos sistemas de ecuaciones pueden dar soluciones que manifiestan un desorden absoluto. Así ha nacido la *Teoría del caos*, que permite explicar muchos fenómenos del mundo real, como los movimientos irregulares de los asteroides y la capacidad que tienen ciertos grupos de células del corazón de comportarse de manera aberrante y desordenada.

Con estas ideas ya había trabajado **Henri Poincaré** en 1893. Antes de 1960, **Kolmogorov**, **Liapunov** y **Landau** demostraron algunas propiedades de ecuaciones no lineales que luego se manifestaron de gran interés. Desde la publicación de los *Principia* de **Newton**, los físicos dedicaron muchos esfuerzos durante tres siglos al perfeccionamiento de las leyes del movimiento, mientras los matemáticos buscaban mejores maneras de calcular las trayectorias de objetos en movimiento. Los avances en este sentido son importantes para estudiar muchos fenómenos naturales. Por ejemplo, las órbitas de los asteroides se ven muy alteradas al pasar por el campo gravitatorio de *Júpiter*. La perturbación depende de varias posiciones relativas lo que imposibilita determinar la órbita para unos cuantos años. Tampoco se puede predecir el tiempo con mucha antelación debido a que perturbaciones atmosféricas inicialmente pequeñas pueden llegar a hacerse dominantes en pocos días. También son caóticos los cambios en los campos magnéticos de la Tierra, debido a los movimientos turbulentos de las rocas líquidas del núcleo terrestre. Con este espíritu, en 1963, **E.N. Lorentz** resolvió un conjunto de ecuaciones para describir la formación de flujos turbulentos en un líquido calentado por abajo. Poco después, **Mandelbrot** le dio la vuelta a la cuestión como si se hubiese preguntado qué clases de movimientos existen y qué podemos aprender de su variedad. Así obtuvo una serie de patrones de fascinante complejidad reproducibles en un ordenador.

El caos también está presente en la evolución pues un pequeño aumento en la eficiencia reproductora de una especie provoca un enorme crecimiento de la población, que puede ir seguido de un rápido declive al agotarse los recursos alimenticios.

PROBLEMAS SIN RESOLVER

Hay campos de las Ciencias básicas que necesitan ayuda de las Matemáticas. Algunos son de naturaleza combinatoria cuya complejidad crece con el número de datos. El determinar la ruta más corta para un viajero que deba visitar doce ciudades se puede resolver calculando la suma de todos los itinerarios posibles. Al aumentar el número de ciudades crece la magnitud del problema y lo sitúa fuera de la capacidad de los superordenadores. Este problema tiene análogos con gran interés práctico en el funcionamiento de los mercados bursátiles mundiales o en la cuestión del plegamiento de las moléculas de proteínas, formadas por miles de aminoácidos empalmados, para adoptar una forma funcional, que suele coincidir con la disposición de mínima energía. Más complejo aún puede resultar el funcionamiento de esas proteínas, pues en cada función se producen interacciones entre varias proteínas. Aunque la solución completa de algunos problemas actuales está fuera de las posibilidades de los ordenadores actuales, e incluso de los del futuro próximo, no quiere decir que esos mismos ordenadores, como sucedió con la ecuación de **Fermat**, no nos puedan sugerir ya algunas soluciones.

Poincaré (1854-1912)

Kolmogorov (1903-1987)

El segundo campo necesitado de la ayuda de las Matemáticas es el desarrollo de sistemas informáticos adaptados a las nuevas necesidades de análisis de gran cantidad de datos. Una especialidad es la Bioinformática. El menor ente conocido al que se atribuye cierto tipo de vida se llama viroide y almacena una información equivalente a 100.000 datos. Hay viroides detectados que atacan a patatas y cítricos estimulando su capacidad de reacción. El menor virus almacena una información del orden de un millón de datos. En muchas funciones se manifiesta la intervención de miles de genes. Parece, pues, que se van a necesitar modelos informáticos que sean capaces de dar sentido a la enorme masa de datos acumulados. La tarea de desentrañar las funciones de los 100.000 genes humanos exigirá un esfuerzo mucho mayor que el ya dedicado a su identificación, pues, en cada función, suelen intervenir varios miles de genes. Los megabytes (10^6 bytes) y gigabytes (10^9 bytes) dejarán paso a los terabytes (10^{12} bytes). Convertir este conocimiento en medicinas útiles será una tarea adicional, que nos puede traer medicina a la carta con más eficacia y reducción de efectos secundarios, dado que los distintos genes responden de forma diferente a las drogas. Los mapas genéticos permitirán anticiparse a tipos de cáncer de difícil diagnóstico y atacar mejor a los resistentes a la Quimioterapia. Ayudas inestimables serán las redes bayesianas y lo procedimientos de clasificación basados en redes neuronales. También ciertas propiedades de la Mecánica cuántica nos pueden ayudar a obtener ordenadores más rápidos.

Mandelbrot (1924-)

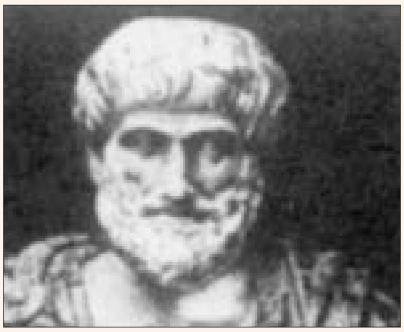
El tercer campo donde se necesitan las Matemáticas es aún más complejo y está estimulado por la idea de que la estructura del espacio-tiempo puede ser más complicada de lo que ahora suponemos. Hoy tenemos una explicación razonable de cómo se originó el Universo y pensamos que la materia deriva sus propiedades del acontecimiento en el que el Universo entero hizo su aparición. Esta explicación tiene muchos defectos pues, por ejemplo, la cantidad de materia es mucho menor de la esperada. Como ocurrió con el éter, hay mucha gente seria dedicada a buscar los componentes de la "masa oculta", y tal vez lo que suceda es que nuestros conocimientos actuales del Universo sean incompletos, como lo era el Electromagnetismo de **Maxwell** sin relatividad. Tampoco sabemos si el modelo estándar de la Física es completo. Muchos trabajan en reconciliar la teoría de la gravedad de **Einstein** con la Mecánica cuántica, dos de los logros intelectuales más sobresalientes del siglo XX y que muchos piensan que se conseguirá con el modelo que representa las partículas como minúsculas cuerdas o membranas vibratorias, lo que plantea la cuestión de si las cuerdas u otras estructuras deben considerarse partes de la estructura del espacio vacío. La tarea de tender un puente entre la Mecánica cuántica y la gravitación parece destinada a dotar al espacio-tiempo de una estructura que cambiará el concepto de espacio aceptado en la Ciencia desde **Descartes**.

La Matemática es una parte esencial de la Ciencia en la comprensión de nuestro mundo. Desde que **Copérnico** echó raíces, el moderno idioma de la Ciencia con la combinación de observación, experimentación e imaginación ha ampliado nuestro conocimiento del mundo. No obstante, las cuestiones planteadas no han cambiado radicalmente. **Aristóteles** se preguntaba cómo está construido el Universo. **Copérnico** respondió lo mejor que pudo situando al Sol en el centro. En tiempos de **Hubble** (1929) parecía que la legítima curiosidad de **Aristóteles** acerca del mundo estaba ya satisfecha. Pero entonces se planteó la pregunta en términos más pro-

Descartes (1596-1650)

fundos que la hacían más difícil. **Gamov** se propuso explicar no sólo cómo era el Universo, sino cómo se originó.

Por una parte, la observación y experimentación se han situado en posiciones dominantes en el siglo XX, ya que la veracidad de las explicaciones nunca se ha puesto a prueba tan rigurosamente mediante experimentos, lo que hace prever que las aplicaciones de la Ciencia se harán notar en los próximos siglos más aún que en el nuestro. Como dice **Popper**, *una explicación carece de valor a menos que se pueda probar mediante observaciones o experimentos y sea posible demostrar la veracidad o falsedad de las predicciones basadas en ella.* Pero, por otra parte, los grandes hitos del siglo XX han sido nuevas te-



Aristóteles (384-322 a. de C.)

orías, como la Relatividad, la Mecánica cuántica, el Teorema de **Gödel** o la estructura del ADN. Por ello, junto al desarrollo de muchas aplicaciones, no se ve el final al proceso de investigación, que seguramente mantendrá ocupados a nuestros hijos durante siglos y, casi con seguridad, hasta el final de los tiempos, pues, como **Hamlet** le dijo a **Horacio**, *"Hay muchas más cosas en el Cielo y en la Tierra, querido Horacio, de las que tu filosofía pueda soñar".*

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

1. V.I. ARNOL'D and V.A. VASIL EV, *Newton's "Principia" read 300 years* later, Notices Amer. Math. Soc. 36 (9) (1989), 1148-1154.
2. J. DIEUDONNÉ. *En honor del espíritu humano.* Las matemáticas hoy. Alianza Editorial, 1989.
3. P. GARCÍA BARRENO (dir): *La ciencia en tus manos.* Espasa Forum. Espasa Calpe, 2000.
4. M. GUILLEM *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo.* Tema de Debate, 1999.
5. F. LE LIONNAIS. *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* (Eudeba, Buenos Aires, 1962).
6. J. MADDOX. *Lo que queda por descubrir.* Debate pensamiento, 1999.
7. D. MARAVALL *Filosofía de las matemáticas.* Dossat 1961.
8. D. MARAVALL *Teoría de la Investigación Matemática.* Dossat 1966.
9. D. MARAVALL *Didáctica y Dialéctica Matemáticas.* Dossat 1969.
10. D. MARAVALL *Grandes problemas de la Filosofía Científica.* Editora Nacional, 1973.
11. D. MARAVALL *Introducción a la investigación en Física y Matemáticas.* Empeño 14, 1981.
12. B. RUSELL *Historia de la filosofía occidental* (Colección Austral, Madrid, segunda edición, 1997).

BIBLIOGRAFÍA ESPECIALIZADA

1. E. J. AITON, *The application of the infinitesimal calculus to some physical problems by Leibniz and his friends, 300 Jahre* "Nova methodus" von G.W. LEIBNIZ (1684-1984) (Wiesbaden, 1986), 133-143.
2. E. N. da C. ANDRADE, *Newton and the science of his age*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 181 (1943), 227-243.
3. I. H. ANELLIS, *Russell's earliest interpretation of Cantorian set theory, 1896-1900.* Philos. Math. (2) 2 (1) (1987), 1-31.
4. B. ARTMANN, *Euclid's "Elements" and its prehistory*, On Mathematics (Edmonton, AB, 1992), 1-47.
5. K. BACHOWICZ, *On certain of Leibniz's observatioons concerning the substantiation of mathematical statements,* Polish Acad. Sci. Inst. Philos. Bull. Sect. Logic 12 (4) (1983), 143-147
6. A. LO BELLO, *Descartes and the philosophy of mathematics,* The Mathematical Intelligence 13 (1991), 35-39.
7. D. BERTOLONI MELI, *Some aspects of the interaction between natural philosophy and mathematics in Leibniz,* The Leibniz renaissance (Florencia, 1989), 9-22.
8. J. BLAQUIER, *Sir Isaac Newton: the man and the mathematician*, Anales Acad. Nac. Ci. Ex. Fis. Nat. Buenos Aires 12 (1947), 9-32
9. W.J. BROAD, *Sir Isaac Newton: mad as a hatter,* Science 213 (4514) (1981), 1341-1344.
10. R.W. BRUMBAUGH, *The philosophers of Greece* (Albany, New York, 1981).
11. C.B. BOYER, *Fermat and Descartes,* Scripta Math. 18 (1952), 189-217.
12. C.B. BOYER, *Descartes and the geometrization of algebra,* Amer. Math. Monthly 66 (1959), 390-393.
13. H. BREGER, *Le continu chez Leibniz.* Le labyrinthe du continu (París, 1992), 76-84.
14. N. BOURBAKI, *Elementos de la Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad, 1976.
15. C.C. CHRISTIAN, *Remarks concerning Kurt Gödel's life and work,* Mathematical logic and its applications (New York – London, 1987), 3 – 7.
16. J. CROSSLEY, *A note on Cantor's theorem and Russell's paradox.* Austral. J. Philos. 51 (1973), 70-71.
17. J.W. DAWSON, *The papers of Kurt Gödel,* Historia Mathematica 13 (3) (1986), 277.
18. R. DIMITRI'C, *Sir Isaac Newton,* Math. Intelligencer 12 (1) (1991), 61 – 65.

19. P. DUGAC, *Georg Cantor and Henri Poincaré,* Bulletino Storia delle Scienze Matematiche 4 (1984), 65 – 96.

20. H. ERLICHSON, *How Newton went from a mathematical model to a physical model for the problem of a first resistive force*, Centaurus 34 (3) (1991), 272 – 283.

21. S. FEFERMAN, *Kurt Gödel: conviction and caution*, Philos. Natur. 21 (2 – 4) (1984).

22. D.H. FOWLER, *The mathematics of Plato's academy: a new reconstruction* (Oxford U.P. 1987).

23. D.H. FOWLER, *An invitation to read Book X of Euclid's "Elements"*, Historia Math. 19 (3) (1992), 233 – 264.

24. A. FRANKLIN and C. HOWSON, *Newton and Kepler, a Bayesian approach,* Stud. Hist. Philos. Sci. 16 (4) (1985), 379 – 385.

25. F. DE GANT, *The mathematical style of Newton's "Principia",* Mathesis 6 (2) (1990), 163 – 189.

26. H. GISPERT, *La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905: Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres,* Rev. Historie Math. 1 (1) (1995), 39 – 81.

27. T.L. HEATH, *A history of Greek mathematics II* (Oxford U.P. 1931).

28. M.D. HENDY, *Euclid and the fundamental theorem of arithmetic,* Historia Math. 2 (1975), 189 – 192.

29. M. HORVATH, *The problem of the infinitely small in mathematics in the work of Leibniz,* Mat. Lapok 30 (1 – 3) (1978/82), 191 – 209.

30. C.V. JONES, *La influencia de Aristóteles en los fundamentos de los Elementos de Euclides.* Mathesis 3 (4) (1987), 375 – 387.

31. A. KERTÉSZ, *The significance of Cantor's ideas for the development of algebra,* Scientia 105 (1976), 203 – 209.

32. S.C. KLEENE, *The work of Kurt Gödel,* J. Symbolic Logie 41 (4) (1976), 781 – 778.

33. M. KLINE, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Universidad 1992.

34. F. LE LIONNAIS, *Descartes et Einstein,* Rev. Hist. Sci. Appl. 5 (1952), 139 – 154.

35. M. NAUENBERG, *Newton's early computational method,* Archiv for the History of the exact Science 46 (3) (1994), 221-252.

36. C. PARSONS, *Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought*, Bull. Symbolic Logic 1 (1) (1995), 44 – 74.

37. S.Q. TONG, *Descartes' way of thinking about mathematics,* Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban 20 (1) (1994), 89 – 95.

38. V.B. VEL'MESHEV, *Physics and mathematics and their connection in Leibniz's work,* Istor. Metodol. Estestv. Nauk 34 (1988), 97 – 101.

39. H. WANG, *Some facts about Kurt Gödel,* J. Symbolic Logie 46 (3) (1981), 653 – 659.

40. D.T. WHITESIDE, *The mathematical principles underlying Newton's Principia,* Journal for the history of Astronomy 1 (1970), 118 – 119.

41. D.T. WHITESIDE, *Newton the mathematician,* Contemporary Newtonian research (Dordrecht, Boston, 1982), 109 – 127. ■