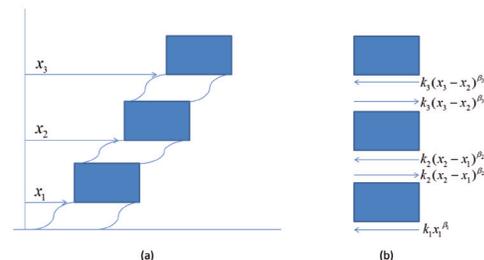


Análisis de las vibraciones de sistemas de rigidez no lineal mediante el cálculo fraccionario

DYNAMIC ANALYSIS OF NONLINEAR STRUCTURAL SYSTEMS BY MEANS OF FRACTIONAL CALCULUS



DOI: <http://dx.doi.org/10.6036/7295> | Recibido: 15/09/2014 • Aceptado: 10/11/2014

Imanol Sarria¹, Jon García-Barruetaña^{1,2},
 Fernando Cortés-Martínez¹ y Modesto Mateos-Heis³

¹ UNIVERSIDAD DE DEUSTO. Facultad de Ingeniería. Avda de las Universidades, 24 - 48007 Bilbao. Tfno: +34 944 139 003. isarria@deusto.es

² DEUSTO INSTITUTE OF TECHNOLOGY (DeustoTech). Universidad de Deusto. Avda de las Universidades, 24 - 48007 Bilbao. Tfno: +34 944 139 003.

³ UNIVERSIDAD DE MONDRAGÓN. Dpto. de Ingeniería Mecánica. Calle Loramendi, 4 - 20500 Mondragón. Tfno: +34 943 794 700.

ABSTRACT

• In this article the vibrational analysis of non-linear systems by means of fractional calculus is presented. This kind of non-linear problems appears in many areas of mechanical engineering, such as the contact in bearings, complex behavior materials, great displacements, vibrations in buildings, etc. The aim of this study is to find an alternative to methods like Runge-Kutta, which duplicate the number of equations to solve. The aim is, therefore, to apply traditional methods in structural mechanics that maintain the size of the system, like, for instance, the finite central difference method. For that it is necessary to linearize the system of equations. The proposed method transforms the original non-linear problem into fractional linear integro-differential equations, where the fractional operator represents a variable stiffness. Two typical application examples in mechanical engineering are presented: the elastic impact of two spheres (system of one degree of freedom) and the transient dynamic response of a building (system of multiple degrees of freedom) under the effect of a wind load. From the obtained results it can be concluded that the proposed method describes correctly the time response of the studied systems, reducing the computational effort.

• **Keywords:** Structural dynamics, non-linear stiffness, fractional calculus, transient response, numerical methods.

RESUMEN

En este artículo se presenta el análisis de las vibraciones de sistemas de rigidez no lineal mediante el cálculo fraccionario. Por ejemplo, este tipo de problemas aparece en muchas disciplinas de Ingeniería Mecánica como en el contacto de rodamientos, materiales de comportamiento complejo, grandes desplazamientos, vibraciones en edificios, etc. El motivo de este estudio es encontrar una alternativa a métodos como Runge-Kutta que duplican el número de ecuaciones que hay que resolver. El objetivo es por lo tanto, aplicar métodos tradicionales en mecánica estructural que mantengan el tamaño del sistema, como, por ejemplo, el método de las diferencias finitas centrales. Para ello es necesario linearizar el sistema de ecuaciones. La metodología propuesta transforma el problema no lineal original en una ecuación integro-diferencial fraccionaria, en la que el operador fraccionario representa una rigidez variable. Se presentan dos ejemplos de aplicación típicos en Ingeniería Mecánica: el impacto de dos esferas elásticas (sistema de 1 grado de libertad) y la respuesta dinámica transitoria de un edificio (sistema de múltiples grados de libertad) bajo la acción de las cargas de viento. De los resultados obtenidos se concluye que el método propuesto describe correctamente la respuesta temporal de los sistemas estudiados, reduciendo los costes computacionales.

Palabras claves: Dinámica estructural, rigidez no lineal, cálculo fraccionario, respuesta transitoria, métodos numéricos.

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de las vibraciones en Ingeniería Mecánica se encuentra multitud de problemas en los que la rigidez de los elementos es no lineal. Por ejemplo, en el contacto entre las bolas de rodamientos o entre las bolas y la pista de rodadura de dichos rodamientos, en materiales de comportamiento complejo, en grandes desplazamientos, vibraciones en edificios, etc. En el análisis de las vibraciones en este tipo de sistemas se pueden emplear métodos numéricos tradicionales del tipo Runge-Kutta (ver textos de Métodos Numéricos, e.g. [1]). El inconveniente de este tipo de métodos es que doblan el número de ecuaciones que deben resolverse, con el consiguiente coste computacional. Por tanto, en este trabajo se busca un método que, empleando el cálculo fraccionario, convierta las ecuaciones no lineales del problema original en lineales.

Los métodos tradicionales en dinámica estructural lineal como el de Newmark [2], Wilson- θ [3,4] o diferencias finitas centrales [1] resuelven sistemas de ecuaciones del tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} representan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente, $\mathbf{x}(t)$ el vector de los grados de libertad (gdl) del sistema en función del tiempo t , y $\mathbf{F}(t)$ el vector de fuerzas. En multitud de problemas de ingeniería los sistemas muestran un comportamiento no lineal en los que las fuerzas restauradoras f no son proporcionales a los desplazamientos x , sino que vienen dadas por

$$f = kx^\beta \quad (2)$$

donde k es el coeficiente de rigidez y $\beta \neq 1$. Este tipo de problemas es muy habitual en la mecánica del contacto [5] (rodamientos, engranajes...), grandes deformaciones [6] (conformado de metales), etc. Las ecuaciones que gobiernan estos sistemas no responden a la ecuación y los métodos mencionados no pueden ser empleados en la forma tradicional. Uno de los métodos mayoritariamente aceptados en la comunidad de la ingeniería industrial para analizar dichos sistemas no lineales es Runge-Kutta, que presenta el inconveniente de doblar el tamaño del sistema (número de gdl). Por lo tanto, en este artículo se propone un método que permite el análisis de sistemas con no linealidad del tipo mostrado en la ecuación, mediante su transformación en un sistema linealizado como haciendo uso del cálculo fraccionario, y con ello emplear métodos tradicionales en mecánica estructural como el de las diferencias finitas centrales (implementado por ejemplo en programas informáticos de simulación como ABAQUS EXPLICIT [7] y NX NASTRAN [8]).

Respecto a la estructura del artículo, en primer lugar se presentan los fundamentos teóricos del cálculo fraccionario empleados en el método propuesto, haciendo énfasis en las definiciones de Grünwald-Letnikov. A continuación se describe el método de análisis propuesto y su aplicación a dos problemas clásicos en Ingeniería Mecánica: el impacto de dos esferas elásticas (sistema de 1 gdl) y el análisis del comportamiento dinámico de un edificio sometido a la acción del viento (sistema de múltiples gdl). Finalmente se comparan los resultados obtenidos con los del método de Runge-Kutta, y se concluye que el nuevo método representa adecuadamente el comportamiento dinámico de dichos sistemas no lineales sin necesidad de duplicar el número de grados de libertad.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El cálculo fraccionario es una disciplina que históricamente ha sido relegada a la matemática teórica, pero durante las últimas décadas esta rama del análisis matemático ha encontrado aplicación en numerosas áreas de la ingeniería, en concreto en viscoelasticidad [9,10], en problemas estocásticos [11] y más recientemente en la plasticidad de metales [12]. En las cuatro monografías más relevantes [13-16] se recogen dos definiciones de la derivada fraccionaria: la de Riemann-Liouville y la de Grünwald-Letnikov.

La definición de Riemann-Liouville se emplea generalmente para integrales de orden no entero. La derivada de or-

den α con respecto a la variable t para una función $f(t)$, con $\alpha < 0$ y el límite inferior de integración igual a cero se define como

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-y)^{-\alpha-1} f(y) dy, \quad (3)$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma de argumento real z , dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy. \quad (4)$$

Esta función representa la generalización de la función factorial, satisfaciendo

$$z! = \Gamma(z+1), \quad (5)$$

que coincide con la definición clásica del factorial si z es un número entero. Por ejemplo, para $-1 < \alpha < 0$, la aplicación de ecuación (3) en la función t^q , donde q es un número real, lleva a

$$D^\alpha t^q = \frac{d^\alpha t^q}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-\alpha)} t^{q-\alpha}. \quad (6)$$

La definición de Grünwald-Letnikov de la derivada fraccionaria, de cualquier orden α , proviene de la anterior definición de la derivada de orden entero n . La primera derivada de una función $f(t)$ viene dada por

$$D^1 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (7)$$

la segunda derivada por

$$D^2 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \Delta t) + f(t - 2\Delta t)}{(\Delta t)^2}, \quad (8)$$

la tercera por

$$D^3 f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t - \Delta t) + 3f(t - 2\Delta t) - f(t - 3\Delta t)}{(\Delta t)^3}, \quad (9)$$

y así sucesivamente, de modo que la derivada de orden n satisface

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right), \quad (10)$$

donde

$$N = t / \Delta t, \quad (11)$$

y se ha empleado el binomio de Newton

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \quad (12)$$

Si se aplica la función gamma, considerando que

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}, \quad (13)$$

la ecuación (10) se transforma en

$$D^n f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} f(t-j\Delta t) \right). \quad (14)$$

Si se sustituye en esta ecuación el orden entero n por cualquier orden real α , la definición de Grünwald-Letnikov para la derivada fraccionaria lleva a

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f(t-j\Delta t) \right), \quad (15)$$

o, finalmente,

$$D^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left((\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(t-j\Delta t) \right), \quad (16)$$

donde los términos A_{j+1} son los llamados coeficientes de Grünwald-Letnikov, que satisfacen

$$A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}. \quad (17)$$

En la ecuación (16) es importante destacar que la derivada fraccionaria se construye empleando toda la historia de la función ponderada mediante los coeficientes de Grünwald-Letnikov, lo que pone de manifiesto la memoria del operador fraccionario. Para evitar el uso de la función Gamma en aplicaciones numéricas se pueden emplear las siguientes propiedades de los coeficientes de ponderación:

$$A_1 = 1, \quad (18)$$

$$A_{j+1} = \frac{j-\alpha-1}{j} A_j, \quad (19)$$

y, si $\alpha > -1$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_{j+1} = 0. \quad (20)$$

Esta última propiedad se conoce como la memoria corta de las derivadas fraccionarias, implicando que la historia más reciente es más influyente que la más antigua.

El tratamiento numérico clásico del operador fraccionario se puede encontrar en el texto de Oldham y Spanier [16]. La fórmula general satisface

$$D^\alpha f(t) = \left(\frac{N}{t} \right)^\alpha \sum_{j=-1}^N A_j f\left(t - j \frac{t}{N}\right), \quad (21)$$

que es análoga a las fórmulas de integración numérica convencionales, donde $A_j(\alpha)$ son los coeficientes de ponderación,

dependiendo del orden de derivación. Para el método G1, estos coeficientes A_j se denominan coeficientes de Grünwald-Letnikov y se puede usar la ecuación (19). Para simplificar la nomenclatura, la ecuación (21) también se puede escribir como

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f_j. \quad (22)$$

Esta eq. (22) será la empleada en la siguiente sección para resolver dos aplicaciones prácticas.

3. DESARROLLO DEL MÉTODO PROPUESTO Y EJEMPLOS DE APLICACIÓN

En este apartado se desarrolla en primer lugar el método propuesto. A continuación se presentan dos ejemplos de aplicación práctica en ingeniería mecánica: el primero de ellos estudia el impacto de dos esferas elásticas mediante un modelo de 1 grado de libertad, y en el segundo se analiza la respuesta sísmica de un edificio de tres plantas como ejemplo de un sistema de múltiples grados de libertad.

3.1. DESARROLLO DEL MÉTODO PROPUESTO

Para el desarrollo del método se considera el caso de un sistema no lineal descrito mediante la ecuación

$$m\ddot{x} + kx^\beta = 0, \quad (23)$$

que puede transformarse en una ecuación integro diferencial de la forma

$$m\ddot{x} + \bar{k} D^\alpha x = 0, \quad (24)$$

donde

$$x^\beta = \Gamma(1+\beta) D^\alpha x, \quad (25)$$

con

$$\beta = 1 - \alpha \quad (26)$$

y

$$\bar{k} = k\Gamma(1+\beta). \quad (27)$$

Para ello se aplica la definición de la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov mostrada en la ec. (16) pero empleando el desplazamiento en lugar del tiempo, como variable de derivación. De esta forma, la ec. (16) se reescribe como

$$\frac{D^\alpha f(t)}{Dx^\alpha} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((\Delta x)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f(x-j\Delta x) \right). \quad (28)$$

En nuestro caso particular, la función f es el propio desplazamiento x . Por tanto, la ecuación del movimiento (29) escrita en el instante n -ésimo t_n lleva a

$$m\ddot{x}_n + \bar{k} (\Delta x_n)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} (x_n - j\Delta x_n) = 0, \quad (29)$$

donde N es el número de puntos en los que se discretiza numéricamente la derivada fraccionaria, $x_n = x(t_n)$, y $\Delta x_n = x_n / N$. Por último, al extraer el término $j = 0$ del sumatorio de la ec. (29), se llega a

$$m\ddot{x}_n + \bar{k}(\Delta x_n)^{-\alpha} A_0 x_n = -\bar{k}(\Delta x_n)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} (x_n - j\Delta x_n), \quad (30)$$

de donde se obtiene la ecuación dinámica diferencial de segundo orden equivalente

$$m_{eq}\ddot{x}_n + k_{eq}x_n = f_{eq,n}, \quad (31)$$

donde

$$m_{eq} = m, \quad (32)$$

$$k_{eq} = \bar{k}(\Delta x_n)^{-\alpha} \quad (33)$$

y

$$f_{eq,n} = -\bar{k}(\Delta x_n)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N-1} A_{j+1} (x_n - j\Delta x_n). \quad (34)$$

A continuación se presentan dos ejemplos prácticos de aplicación en dos sistemas no lineales, de 1 gdl y 3 gdl respectivamente. En estos ejemplos se emplean las ecuaciones (31)-(34).

3.2. EJEMPLO 1: CHOQUE DE DOS ESFERAS ELÁSTICAS

A continuación se enuncia el problema clásico del choque mecánico entre dos esferas, en base a la teoría de contacto de Hertz [17]. La *teoría de Hertz* se limita a superficies no conformes, continuas y sin fricción, y a sólidos perfectamente elásticos sometidos a pequeñas deformaciones. El contacto entre dos superficies no conformes tiene lugar a lo largo de una línea y las dimensiones de la zona de contacto son pequeñas en comparación con el tamaño de los sólidos. Bajo esta simplificación, el problema se puede analizar sin tener en cuenta la distribución global de tensiones resultante en las zonas de contacto entre los sólidos (ver e.g. [5]). Recientes estudios [18,19] han analizado el impacto entre sólidos haciendo uso del cálculo fraccionario, aunque por medio de transformadas de Laplace y el llamado método de rayos, con el consiguiente esfuerzo computacional.

Los radios de las esferas estudiadas aquí son R_1 y R_2 , y los módulos de Young E_1 y E_2 . (ver figura 1), y el desplazamiento relativo $x(t)$ viene dado por

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (35)$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los desplazamientos de los centros de ambas esferas.

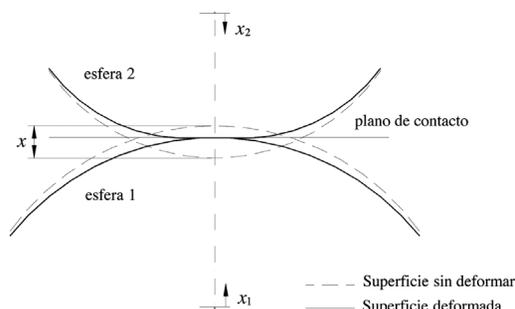


Fig.1: Representación de la deformación de dos esferas en contacto durante un choque

La ecuación que gobierna el sistema de la fig. 1 es

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{4}{3} E \sqrt{R} x^{3/2}(t) = 0, \quad (36)$$

donde t representa el tiempo y m la masa efectiva, que satisfice

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (37)$$

donde el radio R y el módulo E satisfacen

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (38)$$

y

$$\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (39)$$

respectivamente, siendo ν_1 y ν_2 los coeficientes de Poisson. A continuación se realizan los cambios de variable

$$\xi(\tau) = \frac{x(t)}{R} \quad (40)$$

y

$$\tau = t \sqrt{\frac{ER}{m}}, \quad (41)$$

Donde ξ y τ representan adimensionalmente el desplazamiento relativo entre los centroides de las esferas y el tiempo, respectivamente obteniendo a partir de ecuación (36) la ecuación adimensional de movimiento

$$\ddot{\xi}(\tau) + \frac{4}{3} \xi^{3/2}(\tau) = 0, \quad (42)$$

donde el operador $(\ddot{\cdot})$ denota la segunda derivada con respecto a la variable de tiempo adimensional τ .

Tomando $q = 1$, y $\alpha = -1/2$ en la ecuación (6), el término $\xi^{3/2}$ se puede relacionar con la semi-integral $D^{-1/2} \xi$ según

$$D^{-1/2} \xi = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{3/2}, \quad (43)$$

donde se han utilizado $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\delta}$. Reescribiendo la ecuación (43) como

$$\xi^{3/2}(\tau) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} D^{-1/2} \xi(\tau), \quad (44)$$

y substituyendo este resultado en la ecuación (42) se obtiene la ecuación integro-diferencial

$$\ddot{\xi}(\tau) + \sqrt{\pi} D^{-1/2} \xi(\tau) = 0, \quad (45)$$

donde el operador $D^{(\cdot)}$ representa la derivada fraccionaria con respecto a la variable x en vez de τ .

Aplicando la definición de Grünwald-Letnikov (ecuación (28)) la ecuación (45) puede reescribirse en el instante τ_n discretizando con $N = n$, resultando la ecuación

$$\ddot{\xi}_n + \sqrt{\pi} \Delta \xi \sum_{j=0}^n A_j \xi_{n-j} = 0, \quad (46)$$

La ecuación (46) puede resolverse siguiendo el método de las diferencias finitas centrales, donde la aceleración $\ddot{\xi}_n$ viene dada por

$$\ddot{\xi}_n = \frac{\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}}{(\Delta\tau)^2}. \quad (47)$$

El método empleado se limita, por tanto, al uso de diferencias finitas centrales, quedando en este trabajo fuera de su aplicación métodos como el de Newmark.

Substituyendo la ecuación (47) en la ecuación (46) se obtiene

$$\xi_{n+1} = 2\xi_n - \xi_{n-1} - (\Delta\tau)^2 \sqrt{\pi} \Delta\xi \sum_{j=0}^n A_j \xi_{n-j}, \quad (48)$$

que constituye la respuesta del sistema.

Esta última ecuación permite obtener el desplazamiento ξ_{n+1} si se conoce la historia completa, desde $\xi_0 = 0$ hasta ξ_{n+1} . Para el caso descrito, el intervalo $\Delta\xi$ varía para cada instante τ_n , satisfaciendo

$$\Delta\xi = \frac{\xi_n}{n}. \quad (49)$$

La evolución temporal de la variable ξ viene dada por

$$\xi_{n-j} = (n-j)\Delta\xi, \quad (50)$$

conduciendo a la ecuación

$$\xi_{n+1} = 2\xi_n - \xi_{n-1} - (\Delta\tau)^2 \left(\frac{\xi_n}{n}\right)^{3/2} \sqrt{\pi} \sum_{j=0}^n (n-j)A_j. \quad (51)$$

La fig. 2 representa el desplazamiento adimensional ξ durante el tiempo adimensional de impacto $\tau = 2.87$, resuelto mediante la ecuación (51). Esta solución se compara con un método Runge-Kutta de cuarto orden. En dicha figura se puede apreciar cómo ambos métodos ofrecen soluciones equivalentes. En concreto, el paso de integración es de $\Delta\tau = 0.01$.

En esta figura se aprecia que en los primeros instantes del choque, la velocidad de impacto permanece constante, como se deduce de la pendiente de las curvas. Esto es debido a que en un principio la superficie de contacto es pequeña por lo que las fuerzas que frenan las esferas tienen poca influencia. A medida que la superficie de contacto aumenta, se aprecia

cómo las esferas se frenan hasta el instante $\tau = 1.43$ en el que se alcanza la deformación máxima de $\xi = 0.972$, y comienza el rebote. Se aprecia que las curvas son simétricas, debido a que el impacto es elástico y no hay disipación de energía. Una vez alcanzado el instante $\tau = 2.87$, las esferas se separan por completo.

3.3. EJEMPLO 2: VIBRACIÓN HORIZONTAL DE UN EDIFICIO DE VARIAS PLANTAS

A continuación se presenta como segunda aplicación el problema del comportamiento dinámico transitorio de un edificio de tres plantas sometido a una la acción del viento tal y como se muestra en la fig. 3(a).

Dicho edificio se puede modelizar de modo que cada una de las plantas es una masa conectada a las adyacentes por medio de resortes de fuerza recuperadora no lineal. Las masas son m_1, m_2 y m_3 . Las constantes recuperadoras son k_1, k_2 y k_3 , y las potencias fraccionarias en los desplazamientos de cada resorte son β_1, β_2 y β_3 . El diagrama de cuerpo libre de cada una de las tres masas (ver fig. 3(b)) lleva al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + k_1 x_1^{\beta_1}(t) - k_2 (x_2(t) - x_1(t))^{\beta_2} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2 (x_2(t) - x_1(t))^{\beta_2} - k_3 (x_3(t) - x_2(t))^{\beta_3} &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3(t) + k_3 (x_3(t) - x_2(t))^{\beta_3} &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Utilizando la solución de la derivada de orden α de la función t^q con respecto a la variable t indicada en la ecuación (6) para la función $x(t)$, la potencia fraccionaria se puede relacionar con la integral fraccionaria por medio de

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_1 &= x_1^{\beta_1} / \Gamma(1 + \beta_1) \\ D^{\alpha_2} (x_2 - x_1) &= (x_2 - x_1)^{\beta_2} / \Gamma(1 + \beta_2) \\ D^{\alpha_3} (x_3 - x_2) &= (x_3 - x_2)^{\beta_3} / \Gamma(1 + \beta_3), \end{aligned} \quad (53)$$

tomando $q = 1$ y $\alpha_i = 1 - \beta_i$ (con $i = 1, 2, 3$), y siendo $\Gamma(2) = 1$. De esta forma, substituyendo la fuerza recuperadora no lineal por la derivada fraccionaria equivalente, el conjunto

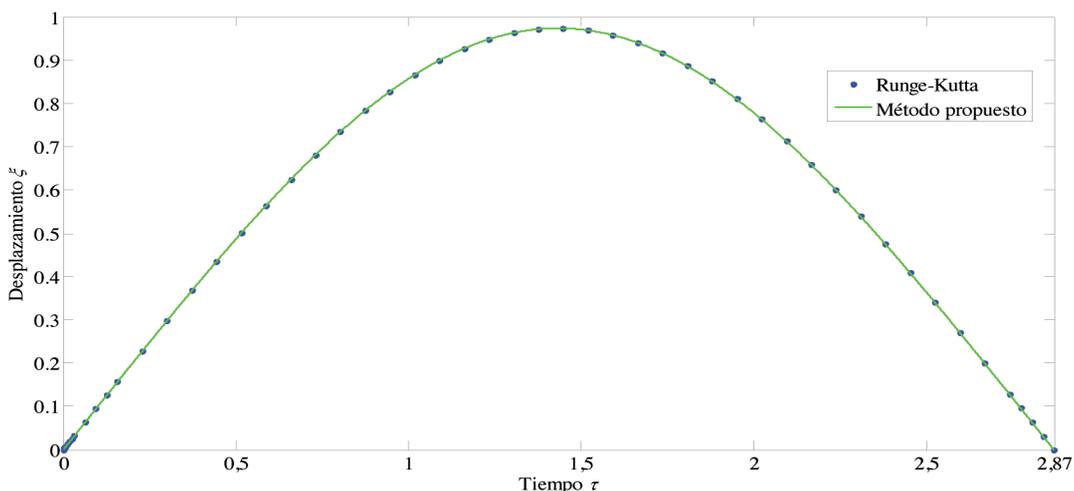


Fig. 2: Deformación relativa en el impacto entre dos esferas en contacto de Hertz a partir de un método Runge-Kutta de cuarto orden (Runge-Kutta) y mediante cálculo fraccionario (Método propuesto)

de ecuaciones ecuación se puede transformar en una ecuación (53) integro-diferencial de la forma

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + k_1 \Gamma(2 - \alpha_1) D^{\alpha_1} x_1(t) - k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) D^{\alpha_2} (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) D^{\alpha_2} (x_2(t) - x_1(t)) - k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) D^{\alpha_3} (x_3(t) - x_2(t)) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3(t) + k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) D^{\alpha_3} (x_3(t) - x_2(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

donde el operador $D^{(\alpha)}$ representa la derivada fraccionaria con respecto a la variable espacial correspondiente.

Así, el conjunto de ecuaciones de movimiento de la ecuación (54) se puede resolver mediante el método de las diferencias finitas centrales. Reescribiendo dicho conjunto de ecuaciones para el instante t_n se obtiene

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t_n) + k_1 \Gamma(2 - \alpha_1) D^{\alpha_1} x_1(t) \Big|_{t=t_n} - k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) D^{\alpha_2} (x_2(t) - x_1(t)) \Big|_{t=t_n} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t_n) + k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) D^{\alpha_2} (x_2(t) - x_1(t)) \Big|_{t=t_n} - k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) D^{\alpha_3} (x_3(t) - x_2(t)) \Big|_{t=t_n} &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3(t_n) + k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) D^{\alpha_3} (x_3(t) - x_2(t)) \Big|_{t=t_n} &= 0, \end{aligned} \quad (55)$$

donde el operador fraccionario se puede discretizar por medio de ecuación (22) resultando

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_{1,n} + k_1 \Gamma(2 - \alpha_1) (\Delta x_1)^{(1 - \alpha_1)} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\alpha_1) x_{1,n-j} & \\ - k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) (\Delta(x_2 - x_1))^{(1 - \alpha_2)} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\alpha_2) (x_2 - x_1)_{n-j} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_{2,n} + k_2 \Gamma(2 - \alpha_2) (\Delta(x_2 - x_1))^{(1 - \alpha_2)} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\alpha_2) (x_2 - x_1)_{n-j} & \\ - k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) (\Delta(x_3 - x_2))^{(1 - \alpha_3)} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\alpha_3) (x_3 - x_2)_{n-j} &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_{3,n} + k_3 \Gamma(2 - \alpha_3) (\Delta(x_3 - x_2))^{(1 - \alpha_3)} \sum_{j=0}^{n-1} A_j(\alpha_3) (x_3 - x_2)_{n-j} &= 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Mediante el cambio de variable

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{Bmatrix} \quad (57)$$

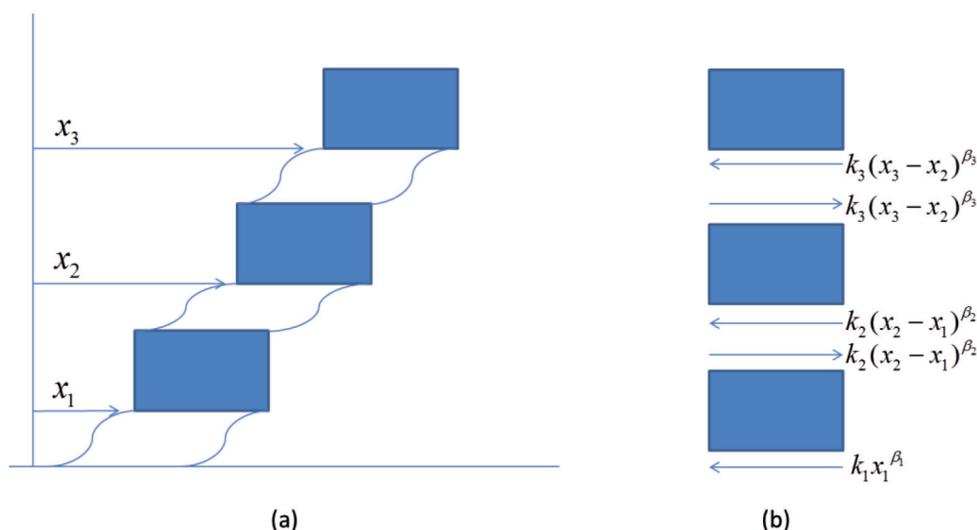


Fig. 3: Modelo simplificado de un edificio de tres plantas: (a) representación de los grados de libertad; (b) diagrama de cuerpo libre de cada una de las plantas del edificio

la ec. (56) puede escribirse mediante la forma clásica

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{F}, \quad (58)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \Gamma(1 + \beta_1) \Delta y_{1,n}^{-\alpha_1} + k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{-\alpha_2} & -k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{-\alpha_2} & 0 \\ -k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{-\alpha_2} & k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{-\alpha_2} + k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{-\alpha_3} & -k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{-\alpha_3} \\ 0 & -k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{-\alpha_3} & k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{-\alpha_3} \end{bmatrix} \quad (60)$$

y

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -k_1 \Gamma(1 + \beta_1) \Delta y_{1,n}^{1 - \alpha_1} \sum_{j=1}^n (n - j) A_j(\alpha_1) + k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{1 - \alpha_2} \sum_{j=1}^n (n - j) A_j(\alpha_2) \\ -k_2 \Gamma(1 + \beta_2) \Delta y_{2,n}^{1 - \alpha_2} \sum_{j=1}^n (n - j) A_j(\alpha_2) + k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{1 - \alpha_3} \sum_{j=1}^n (n - j) A_j(\alpha_3) \\ -k_3 \Gamma(1 + \beta_3) \Delta y_{3,n}^{1 - \alpha_3} \sum_{j=1}^n (n - j) A_j(\alpha_3) \end{bmatrix}. \quad (61)$$

De esta forma, al igual que en el ejemplo anteriormente presentado de 1 gdl, se pueden aplicar los métodos numéricos tradicionales como el de las diferencias finitas centrales (ver ec. (47)).

A continuación se presentan resultados para comparar el método descrito con un método *Runge-Kutta* de cuarto orden.

Los valores numéricos utilizados para las masas son $m_1 = 3000$ kg, $m_2 = 4000$ kg, y $m_3 = 5000$ kg. Los coeficientes de rigidez usados son $k_1 = 5000$ N/m, $k_2 = 4000$ N/m y $k_3 = 3000$ N/m, y los exponentes fraccionarios en las correspondientes fuerzas recuperadoras son $\beta_1 = 3/2$, $\beta_2 = 3/2$ y $\beta_3 = 3/2$. Se han considerado las siguientes condiciones iniciales de posición: $x_1 = 0.001$ m, $x_2 = 0.01$ m y $x_3 = 0.02$ m, con velocidades iniciales nulas en cada caso.

La fig. 4 muestra la comparativa entre la solución obtenida mediante ambos procedimientos, donde queda patente la validez del método propuesto. El paso de integración utilizado es $\Delta t = 0.001$ s.

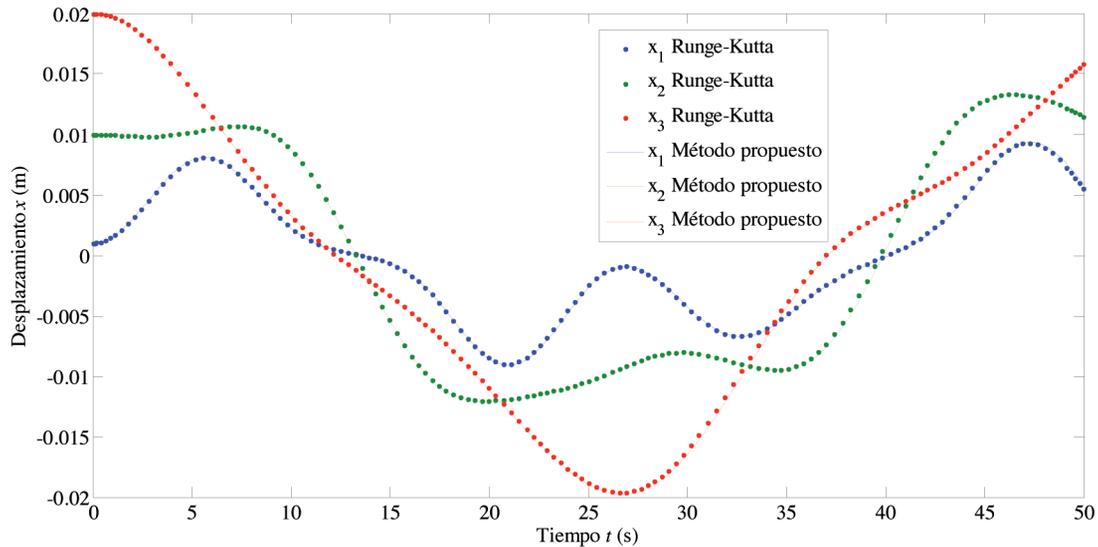


Fig. 4: Desplazamiento transversal de cada una de las tres plantas (x_1, x_2, x_3) de un edificio medido a partir de un método Runge-Kutta de cuarto orden (Runge-Kutta) y mediante cálculo fraccionario (Método propuesto)

En esta figura se representa el desplazamiento transversal de cada una de las plantas del edificio originado por las vibraciones inducidas por el golpe de viento que provoca las condiciones iniciales mencionadas previamente. Debido a que no se ha contemplado ningún tipo de amortiguamiento, estos desplazamientos vienen representados por curvas periódicas, siendo el desplazamiento máximo el impuesto en las condiciones iniciales.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado el análisis de las vibraciones de sistemas de rigidez no lineal mediante el cálculo fraccionario. Se ha encontrado una alternativa a métodos como Runge-Kutta que duplican el número de ecuaciones que hay que resolver. A partir del método propuesto se ha utilizado el método de las diferencias finitas centrales que mantiene el tamaño del sistema. Para ello se ha linearizado el sistema de ecuaciones en una ecuación integro-diferencial fraccionaria, en la que el operador fraccionario representa una rigidez variable. Se han presentado dos ejemplos de aplicación típicos en Ingeniería Mecánica: el impacto de dos esferas elásticas (sistema de 1 grado de libertad) y la respuesta dinámica transitoria de un edificio (sistema de múltiples grados de libertad) bajo la acción de las cargas de viento. De los resultados obtenidos se concluye que el método propuesto describe correctamente la respuesta temporal de los sistemas estudiados, reduciendo los costes computacionales. Como limitación de este trabajo, se puede mencionar que sólo se ha aplicado la metodología propuesta con el método de las diferencias finitas centrales, quedando como estudio futuro su empleo junto a métodos implícitos como Newmark y Wilson- θ .

BIBLIOGRAFÍA

[1] Chapra SC, Canales RP. Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill, 2003. 650p. ISBN: 978-9-70106-114-5.
 [2] Newmark NM. "A method of computation for structural dynamics". Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Engineering

mechanics division, 1953. Vol. 85. P.67-93.
 [3] Wilson EL. "Dynamic response by step-by-step matrix analysis". Proceedings of the Symposium on the use of computers in civil engineering. Laboratorio Nacional da Engenharia Civil Lisbon, Portugal, 1962. October 1-5.
 [4] Wilson EL, Farhoomand I, and Bathe KJ. "Non-linear dynamic analysis of complex structures". Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1973. Vol.1. P.241-252. (doi: <http://dx.doi.org/10.1002/eqe.4290010305>).
 [5] Johnson KL. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 2003. 462p. ISBN 0521347963.
 [6] Cheng J, Kikuchi N. "An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1985. Vol. 85. P.71-108.
 [7] Abaqus. English Version. < <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/overview/>> Consulted on 10th of September of 2014.
 [8] NX Nastran. English Version. < http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/nx/for-simulation/> Consulted on 10th of September of 2014.
 [9] Cortés F, Martínez M, Elejabarrieta MJ. Viscoelastic Surface Treatments for Passive Control of Structural Vibration. Nova Publishers Inc., New York, USA. 2012. 75p. ISBN: 978-1-61209-944-6
 [10] Díaz Calleja R, Martín Guzmán G. "Application of fractional derivative method to spectral analysis of relaxation-time from dynamic viscoelastic data". Anales de Física. 1975. Vol. 71. Issue 5. P. 277-279.
 [11] Agrawal OP. "Stochastic analysis of dynamic systems containing fractional derivatives". Journal of Sound and Vibration. Nov. 2001. Vol. 247. P. 927-938. (doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.2001.3682>).
 [12] Mendiguren J, Cortés F, Galdos L. "A generalised fractional derivative model to represent elastoplastic behaviour of metals". International Journal of Mechanical Sciences. 2012. Vol. 65. P 12-17. (doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.08.008>).
 [13] Hilfer R. (Ed.). Applications of fractional calculus in physics. World Scientific, Singapore, 2000. 463p. ISBN 9810234570.
 [14] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, 1999. 368p. ISBN 0125588402.
 [15] Miller KS, Ross B. An introduction to fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley Et Sons, New York, 1993. 384p. ISBN 0471588849.
 [16] Oldham KB, Spanier J. The fractional calculus. Academic Press, New York, 1974. 234p. ISBN 0125255500.
 [17] Hertz H, "Über die berührung fester elastischer körper". 1882. J. Reine und Angewandte Mahtematik. Vol. 92 p. 156-171.
 [18] Chang TK, Rossikhin Y, Shitikova M, Chao CK. "Dynamic response of a fractionally damped spherical shell impacted by a body of finite dimensions". Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 595. P. 111-116. (doi: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.595.111>).
 [19] Rossikhin Y, Shitikova M. "Fractional derivative viscoelastic model for the analysis of two colliding spherical shells". ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings. 2012. Vol. 12. P 21-32. (doi: <http://dx.doi.org/10.1115/IMECE2012-87346>).