¿CUÁL ES LA CURVA QUE OFRECE EL DESCENSO MÁS RÁPIDO?

Un desafío se lanza en Europa a los matemáticos: encontrar la curva que ofrece el descenso más rápido para un móvil sometido sólo a su peso. Un problema simple, pero cuya solución exige dominar todas las sutilezas del cálculo de variaciones.

Jeanne Peiffer

La entrega de junio 1696 de las *Acta eruditorum* contiene el "problema nuevo" siguiente, seguido de una invitación a los matemáticos para resolverlo:

"Dados dos puntos A y B en un plano vertical, determinar la curva AMB a lo largo de la cual un móvil M, abandonado en A, desciende bajo la acción de su propio peso y llega al otro punto B en el menor tiempo posible". (Fig. 1)

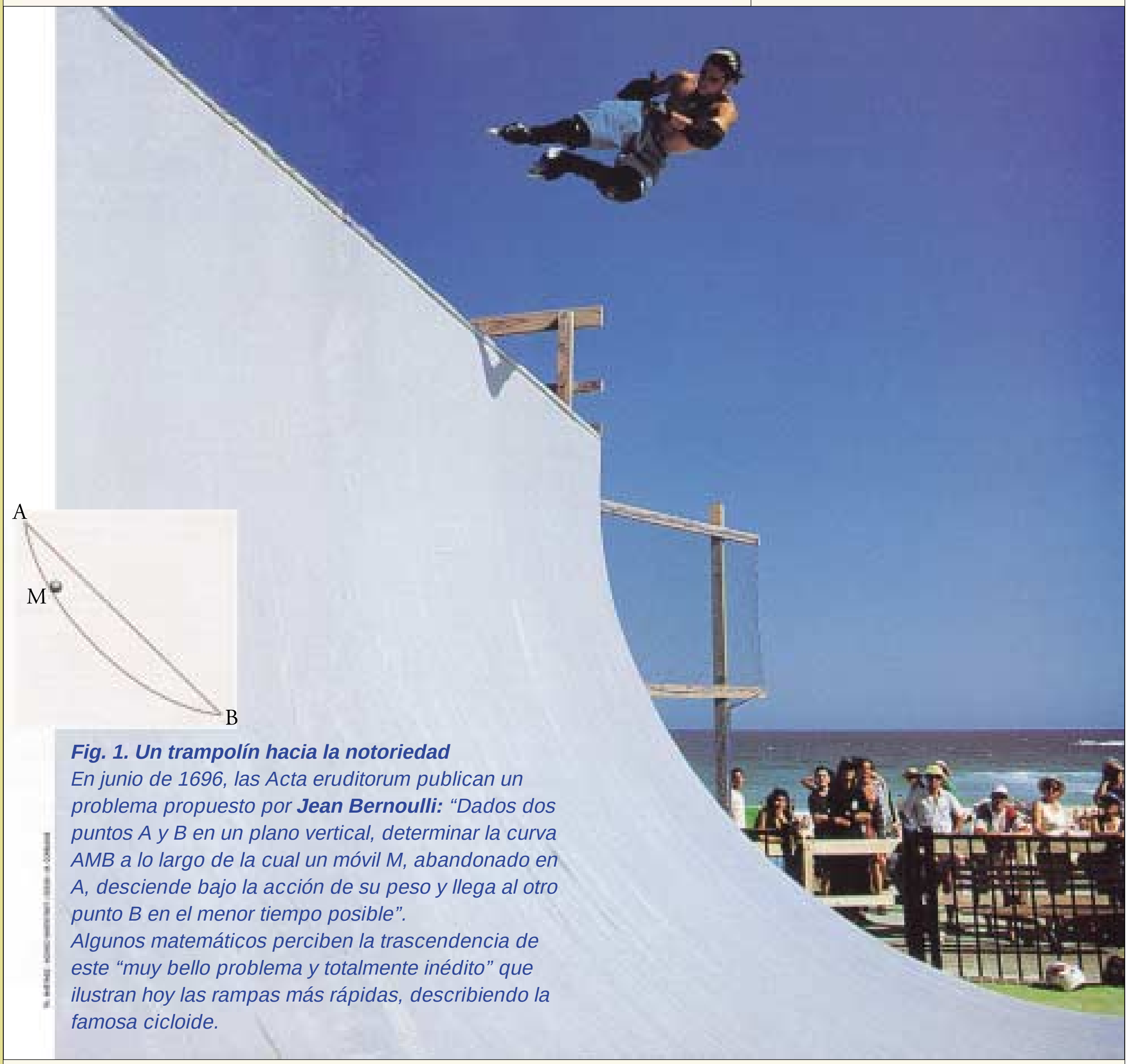


Fig. 1. Un trampolín hacia la notoriedad
*En junio de 1696, las Acta eruditorum publican un problema propuesto por **Jean Bernoulli:** "Dados dos puntos A y B en un plano vertical, determinar la curva AMB a lo largo de la cual un móvil M, abandonado en A, desciende bajo la acción de su peso y llega al otro punto B en el menor tiempo posible".*
Algunos matemáticos perciben la trascendencia de este "muy bello problema y totalmente inédito" que ilustran hoy las rampas más rápidas, describiendo la famosa cicloide.

FORMULACIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA

Siendo A (0,0) el punto donde se abandona sin velocidad inicial un punto pesado sobre un perfil sin rozamiento, la velocidad a la altura de caída x estará dada por:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y

$s = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ la longitud del arco AP. De donde

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx$$

El tiempo de caída T del móvil que se desliza de A (00) a B (y0 x0) será:

$$T = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx$$

El problema es determinar $y = f(x)$ de modo que

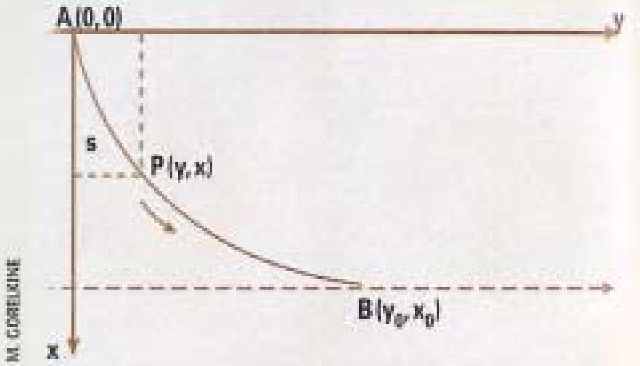
$$T = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}}\,dx$$

sea mínimo.

Es decir, que la curva buscada, de ecuación $Y = f(x)$ está implícitamente definida por una integral de la forma

$$\int_0^x Z(x, y')\,dx$$

en la que no interviene y y cuyo valor debe ser mínimo. Esta situación (minimizar una integral) era totalmente desconocida a finales del siglo XVII. ¿Basta minimizar la expresión bajo el signo integral? La respuesta hace intervenir nociones y resultados entonces desconocidos, como, por ejemplo, el teorema sobre inversión de la integración y la derivación.



Fue Jean Bernoulli quien hizo insertar este problema en las *Actas de Leipzig.* Advierte a sus lectores que la recta no es la curva buscada, si bien sea el camino más corto entre A y B. Y, por tanto, ¡la solución es una curva bien conocida por los geómetras! Bernoulli se propone *"descubrirla si, antes de fin de año, nadie lo hiciera".*

Añadimos algunas hipótesis suplementarias, necesarias para que el problema tenga sentido. Los puntos A y B no deben estar situados ni sobre una misma vertical ni sobre una misma horizontal. Es preciso hacer abstracción de las fuerzas de enlace y admitir que el punto material se desliza sin rozamiento a lo largo del perfil que se busca. Detengámonos ahora un momento para comprender por qué la línea recta no resuelve el problema. La recta minimiza el camino a recorrer para ir de A a B, indica, pues, el descenso más corto, pero es "el más rápido descenso" – para utilizar la terminología francesa del siglo XVIII – lo que se busca. Se trata, pues, de minimizar no el camino sino el tiempo de caída a lo largo de la curva. Ello significa que se toma en cuenta la velocidad del móvil. Y ésta no es constante a lo largo del perfil. Así, una pendiente muy fuerte al inicio y que irá en seguida atenuándose podrá proporcionar al móvil una velocidad suficiente para compensar la longitud del camino a recorrer. Digamos ya que un arco de cicloide invertida ofrece este perfil. Su base será horizontal, su origen se encontrará en el punto dado más elevado y el diámetro del circulo generador será tal que la cicloide pasa por el segundo punto dado.

Una campaña bien orquestada

Apoyado por Gottfried Wilhelm Leibnitz, el inventor del Cálculo diferencial, que estaba atraído por este problema; Jean Bernoulli, joven de la Universidad de Groningen, intenta asegurar al problema una larga difusión más allá del mundo germánico (Francia e Italia especialmente). Para ello utiliza todos los medios a su disposición: sus correspondencias, periódicos..., llegando incluso a hacer imprimir en enero 1697 un anuncio.

La lectura de este manifiesto bajo forma de programa es instructiva. Bernoulli comienza por incluirse en la lista de matemáticos tan célebres como Mersenne, Pascal y Fermat, cuyo ejemplo imita proponiendo a los más excelentes analistas de su tiempo un problema mecánico–geométrico que servirá de piedra de toque a sus métodos y permitirá medir sus fuerzas. Ensalza la importancia estimulante de tales desafíos para el aumento del saber, porque resolver *"problemas difíciles y útiles a la vez"* da esplendor a los nombres de los vencedores que alzan así *"monumentos eternos para la posteridad".* Así rinde homenaje al "célebre Leibnitz" que le ha asegurado por carta *"haber resuelto felizmente el nudo de lo que él llama un problema muy bello y totalmente inédito al día de hoy".*

Bernoulli, por otra parte, está en condiciones de precisar el sentido del problema. Se trata, declara, de escoger *"en medio de la infinidad de curvas que enlazan los dos puntos dados, aquélla a lo largo de la cual – curvando una lámina delgada con la* *forma de un tubo o de un canal – una pequeña bola que allí se deja y abandona recorra el camino de un punto a otro en el más breve espacio de tiempo".* Indica también que la velocidad con la que el móvil desciende a lo largo de la curva es la de la caída libre y obedece a la ley de Galileo: *"Las velocidades adquiridas por un cuerpo pesado en caída libre son como las raíces de las alturas recorridas".*

Finalmente hace un llamamiento al honor de los más grandes sabios: su prometedora gloria, estima y aprobación como recompensas.

Si pasa la Pascua sin que nadie haya publicado una solución, Leibnitz publicará la suya con la de Bernoulli. El párrafo termina con una provocación dirigida a su hermano Jacques Bernoulli, que cuenta *"entre los que se enorgullecen de haber penetrado en los misterios más profundos de la Geometría, gracias a métodos particulares y de haber ampliado su extensión a los teoremas de oro (Theorematis suis aureis), que creen desconocidos por todos cuando han sido ya publicados mucho antes por otros"* Jean Bernoulli hace aquí alusión a la fórmula del radio de curvatura, del cual Jacques estaba muy satisfecho y que Jean había utilizado como carta de presentación ante Malebranche y el Marqués de L'Hôpital durante su estancia en París en 1691.

La verdadera apuesta es, pues, doble. Se trata, en primer lugar, de demostrar la potencia de los métodos del Cálculo infinitesimal, único capaz de llegar al final del problema, reforzando así la posición del nuevo Análisis y correlativamente de poner en evidencia la estrechez de los límites de la Geometría ordinaria.

Simultáneamente, Jean desea aclarar a los ojos del mundo entero la superioridad sobre su hermano y mentor convertido en competidor, Jacques Bernoulli.

Leibnitz está en condiciones de publicar, en el *Acta eruditorum* de mayo 1697, cinco soluciones al problema. Además de las de Jean y Jacques Bernoulli, que vamos a analizar, se encuentra una breve memoria de L'Hôpital, una nota de Tschimhaus y finalmente una solución anónima, de la cual Isaac Newton es el autor, Leibnitz, en un texto introductivo, dice haber renunciado a publicar su identidad a los otros. L'Hôpital ha sabido aprovechar sus intercambios epistolares con Jean Bernoulli y jugar hábilmente los plazos para proponer una solución. Tschimhaus se ha contentado con enunciar que la curva buscada es una cicloide. Cada uno de los autores, consciente de la importancia inédita del problema, ha buscado dar un nombre a la curva – solución. Es el nombre propuesto por Jean Bernoulli el que se ha impuesto: curva *brachystocrona*. (Se refiere al tiempo mínimo). Leibnitz habla de tachystoptota, nombre que traduce una velocidad máxima. Finalmente Jacques Bernoulli ha inventado el término *oligocrona,* para nombrar la curva.

Noble competidor
*El **Marqués de L'Hôpital,** con quien **Jean Bernoulli** se había encontrado en 1691 y con el cual se comunicaba, le propuso también su solución al "desafío".*

LA TRAYECTORIA DE JEAN BERNOULLI

El título de la memoria que Jean Bernoulli envió a las *Acta eruditorum* y que apareció en mayo 1697 (págs. 206-211) anuncia explícitamente la analogía con un principio dióptrico. He aquí: *"Curvatura de un rayo luminoso en medios diáfanos no homogéneos y solución del problema de la brachystocrona.... así como la construcción de la síncrona o de la onda luminosa",* incluso si Jean, contrariamente a su hermano Jacques, no da el método general, formula desde las primeras frases de su memoria la trascendencia matemática del problema. Reconoce claramente que éste no se deja contener entre los límites estrechos de los métodos habituales de máximos y mínimos, porque éstos *"no permiten más que determinar, entre un número finito o infinito de magnitudes dadas, una que sea máximo o mínimo. O, cuando [.....] estas magnitudes, entre las cuales es preciso seleccionar los máximos o mínimos, no están más determinados que el que se busca [.......] la tarea se complica".* En efecto, ya hemos mencionado que se trata de encontrar, entre una infinidad de curvas posibles, la que cumple la condición extrema.

Bernoulli parte del principio que Fermat ha establecido en una carta a Marin Cureau de la Chambre. Lo enuncia así: *"El rayo luminoso, que pasa de un medio menos denso a un medio más denso, se desvía en relación a la perpendicular de tal suerte que el rayo [......] sigue, en relación al tiempo, el camino más corto".* Fermat ha deducido de este principio la *Ley de los senos.* Si i es el ángulo de incidencia y r el ángulo de refracción, sen i y sen r son inversamente proporcionales a las densidades ópticas, que son, a su vez, inversamente proporcionales a las velocidades con las que la luz penetra en los medios diáfanos:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}$$

Fermat concibe entonces un medio de densidad no homogéneo como dividido por una infinidad de laminillas horizontales entre las que se encuentra una materia diáfana cuya densidad óptica crece o decrece a lo largo de un eje vertical. Cada una de estas laminillas va a actuar como una superficie refringente a la que se puede aplicar el principio de Fermat. Un rayo luminoso, que se propague en este medio, será refractado en cada lámina y describirá, por tanto, una curva, que será de tal naturaleza que el tiempo de propagación será el más breve. Además, conforme a la ley de los senos, debe ser tal que en cada punto el seno del ángulo f que forma con la vertical es proporcional a la velocidad v. Es decir, que la curva es tal que

$$\frac{\text{sen}\ \phi}{v} = \text{Cte} = (1/a,\ \text{más adelante})$$

Bernoulli identifica la curva *brachystocrona* con la que describiría un rayo que atravesara un medio cuya densidad óptica sería inversamente proporcional a la velocidad que adquiriría un peso en caída libre.

Sea FGD este medio, limitado por la recta FG, que pasa por la fuente de luz, el punto A, y contiene el punto D. Las velocidades adquiridas por un cuerpo pesado, que cae bajo la acción de su propio peso, son proyectadas horizontalmente sobre un eje vertical AD, de suerte que la curva AHE es la curva de las velocidades. En el caso de la caída libre, AHE es una parábola.

Sea AMB la curva buscada. Traduciendo analíticamente la fórmula

$$f = \frac{1}{a}\ v$$

con 1/a = constante, el resultado es inmediato (Fig. 2).

Si AC = x, la diferencial dx será, conforme a la definición de Leibnitz, el incremento infinitamente pequeño Cc = dx. Igualmente, sean CH = v y CM = y, sus diferenciales serán nm = dy y Mm = ds. En el punto M (x,y), la curva AMB forma con la vertical Mn un ángulo f, cuyo seno, determinado en el triángulo rectángulo Mnm, es igual a dy/ds . Se tendrá en M:

$$\text{sen}\ \phi = \frac{dy}{ds} \quad \text{de donde} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{a}$$

Entonces:

$$dy = \frac{v\,dx}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

Cuando las velocidades son proporcionales a las raíces cuadradas de las alturas recorridas, como en caída libre, $v = \sqrt{ax}$ y la ecuación diferencial de la *brachystocrona* sería:

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

La demostración, breve y elegante, de Bernoulli descansa sobre la idea de que la curva solución obedece en cada uno de sus elementos infinitamente pequeños al principio de Fermat: es recorrida en un tiempo mínimo. Además, en cada uno de sus puntos satisface a la *Ley de los senos,* que se deriva de este principio, escrito bajo la forma:

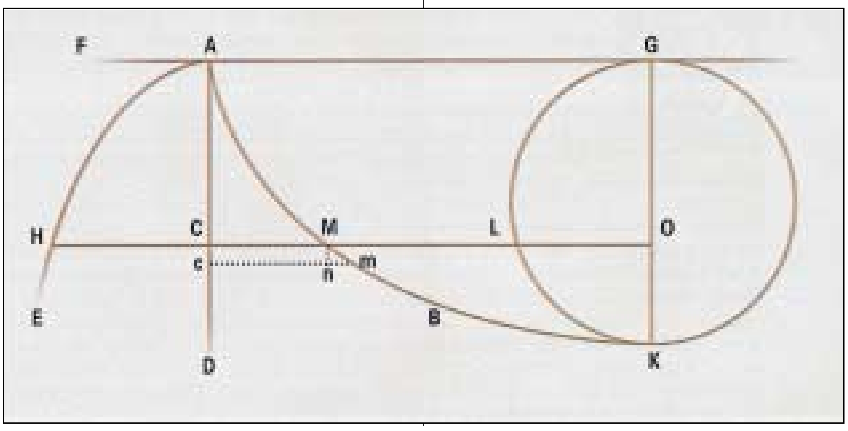


Fig. 2. Bello resultado.

Jean Bernoulli *razona a partir de un medio (FDG), de densidad óptica inversamente proporcional a la velocidad de un cuerpo pesado en caída libre. FG es una recta que pasa por la fuente de la luz (A) AD represente la caída del peso y AHE la curva de las velocidades.*

$$\frac{\text{sen}\ f}{v} = \text{Cte}$$

Reformulada analíticamente, esta condición conduce a la ecuación diferencial de la *brachystocrona* anterior.

Queda, para concluir, que la curva y = f(x), definida por

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}}$$

es una cicloide cuyo circulo generador, de diámetro a, rueda sobre AG, partiendo de A.

Bernoulli descompuso el segundo miembro en dos términos, e integra separadamente cada uno de los términos.

En el segundo,

$$\frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

reconoce la diferencial del segmento LO y, en el primero,

$$\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

la del arco GL.

Por consiguiente, puede escribir: dy = d (GL) - d(LO) y, después de la integración:

CM = GL - LO ó CO + OM = GL - LO.

de donde MO = LO + (CO - GL) ó CO – GL = LK, puesto que CO corresponde a la semicircunferencia GLK

Entonces MO = LO + LK ó MO – LO = ML = LK

Bernoulli reconoce en esta última igualdad ML= LK, la propiedad general de la cicloide (el segmento recorrido por el circulo sobre la base es igual al arco de circulo recorrido por el punto sobre el círculo)

Para concluir, expresa su admiración ante la identidad entre la *tautocrona* de Huygens y su *brachystocrona,* en el caso de que el móvil obedezca a las leyes de la caída libre. La cicloide es entonces a la vez *tautocrona* (es decir, que el tiempo de caída es siempre el mismo cualquiera que sea la altura a la que inicia la carrera) y *brachystocrona.* Esta identidad confirma el principio de que *"la Naturaleza actúa siempre de la manera más simple".*

LA *OLIGOCRONA* DE JACQUES BERNOULLI

Desde las primeras líneas de la memoria de Jacques Bernoulli, publicada en la misma entrega de mayo 1697 de las *Acta eruditorum,* es evidente que Jacques ha reconocido el inmenso poder de innovación que posee el problema propuesto por su hermano. Él caracteriza toda una clase de problemas a la cual podrá aplicarse su método: encontrar en una familia de curvas la que obedece a una condición externa.

En un lema preliminar, plantea la cuestión de saber si las propiedades extremas de la curva se conservan en cada una de sus partes. Según él, éste es el caso. Pero a continuación minimizará (como también lo hiciera Jean Bernoulli, que no ha explicitado esta dificultad) el tiempo de caída a lo largo de uno de los elementos infinitamente pequeños de la curva y admitirá que es entonces la longitud de la curva entera, lo que no es necesariamente el caso.

Sea ACB la curva buscada, a lo largo de la cual un móvil pesado, abandonado en A, llega a B en un tiempo más corto que sobre cualquier otra curva. Jacques Bernoulli considera sobre esta curva dos puntos C y D infinitamente próximos. Traza entonces la recta horizontal AH, que pasa por A, la perpendicular CH a AH y la recta horizontal DF que pasa por el punto D. Sea también E el punto medio de CF y tal que EFDI sea un paralelogramo (Fig. 3).

Jacques Bernoulli se propone determinar sobre EI un punto G tal que el tiempo de caída a lo largo de CG, al que llama tCG + tGD, sea mínimo, siendo el móvil abandonado en A.

Para poder utilizar la condición del mínimo, considera sobre EI otro punto, L, tal que GL sea infinitamente pequeño en relación a EG (es decir, un infinitamente pequeño de segundo orden, puesto que EG es ya infinitamente pequeño).

La astucia de la demostración de Jacques reside en la introducción de esta diferencia de segundo orden. En efecto, si HC = y, el diferencial dy será igual a CE. Sobre la recta de ecuación y+dy/2 = Cte., considera dos valores de x situados cada uno sobre una curva diferente, una sobre CMGD y otra sobre CLND, infinitamente próxima a la primera. Esta diferencial segunda “de curva a curva” (como diría Leibnitz), le permite comparar las curvas y seleccionar la que cumple la condición mínima.

Se trazan los arcos CL y DL materializando el elemento de la curva de comparación introducida más arriba. Como el tiempo de caída a lo largo de CG+GD se supone mínimo, se tiene:

$$tCL + tLD = tCG + tGD$$

por tanto

$$tCG - tCL = tLD - tGD \qquad (1)$$

Jacques compara a continuación el tiempo de caída a lo largo de los elementos de la curva con el tiempo de caída vertical. Según la naturaleza de la caída de los cuerpos pesados, los espacios recorridos son como los tiempos:

$$\frac{CE}{CG} = \frac{tCE}{tCG} \text{ y } \frac{CE}{CL} = \frac{tCE}{tCL}$$

Y por un simple cálculo de proporciones:

$$\frac{CE}{CG - CL} = \frac{tCE}{tCG - tCL} \qquad (2)$$

La siguiente etapa consiste en trazar dos arcos circulares LM y GN de centros C y D respectivamente. En primera aproximación CL= CM. Por consideraciones de Geometría infinitesimal, Jacques evalúa las relaciones

$$\frac{CE}{GL} \text{ y } \frac{EF}{GL}$$

en las cuales interviene el infinitamente pequeño de segundo orden GL. Ambas relaciones son iguales, lo que dará la ecuación diferencial de la curva buscada. De momento se constata la semejanza del triángulo MGL,

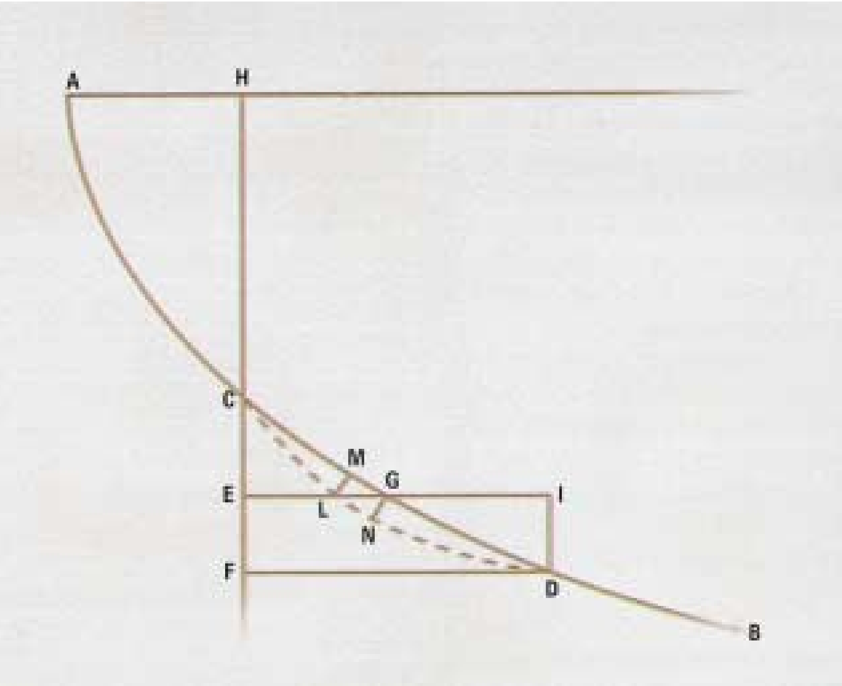
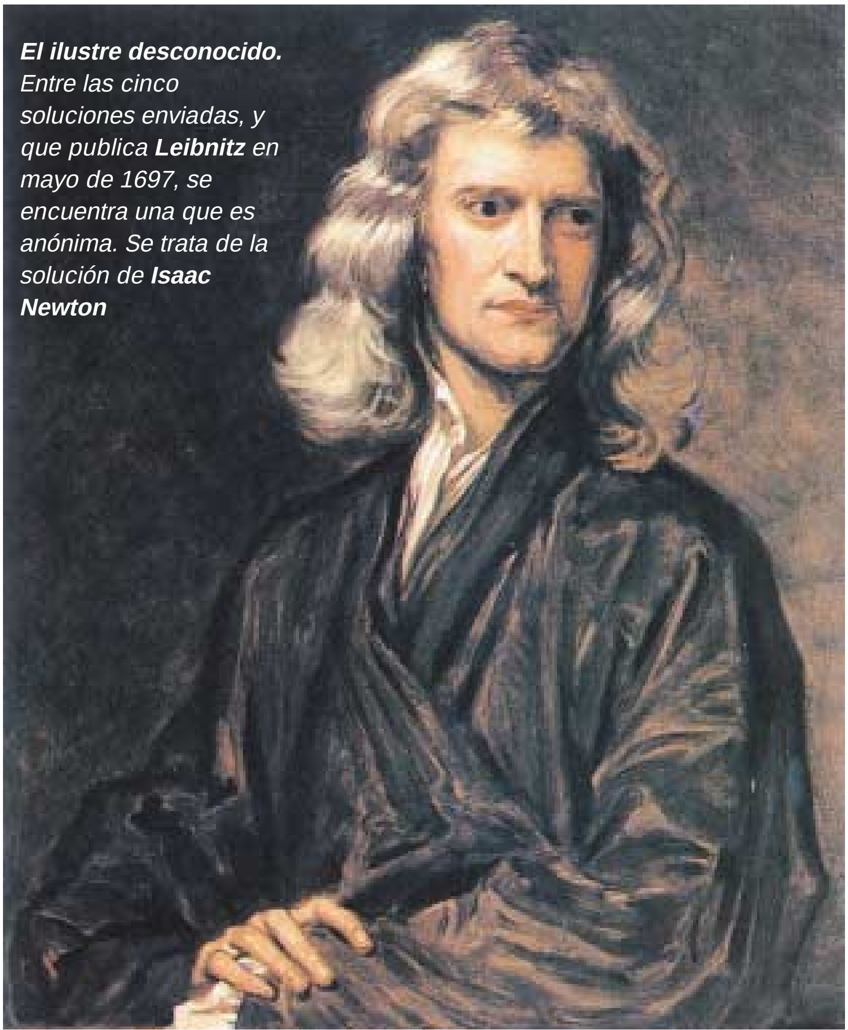


Fig. 3. Jacques ha dicho

Jacques Bernoulli, el hermano de Jean, le propuso también una solución, ACB representa la curva seguida por un peso abandonado en A. C y D son dos puntos muy próximos situados en dicha curva. Se busca G tal que tCG+tGD sea mínimo. Para conseguir esto, introduce la idea de una diferencia de 2º orden, lo que le permite comparar ambas curvas y seleccionar la que cumple la condición de mínimo.



El ilustre desconocido. *Entre las cinco soluciones enviadas, y que publica* ***Leibnitz*** *en mayo de 1697, se encuentra una que es anónima. Se trata de la solución de* ***Isaac Newton***

infinitamente pequeño de segundo orden en el triángulo CEG de primer orden. Se tiene:

$$\frac{MG}{GL} = \frac{EG}{CG} \qquad (3)$$

Introduciendo

$$MG = GL\,\frac{EG}{CG}$$

en (2) se tiene:

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EG.tCE}{CG(tCG - tCL)} \qquad (4)$$

Jacques Bernoulli efectúa las mismas operaciones con los dos arcos de curvas CG y LD para encontrar:

$$\frac{EF}{GL} = \frac{GI.tEF}{GD(tLD - tGD)} \qquad (5)$$

Como

$$\frac{CE}{GL} = \frac{EF}{LG}$$

se pueden igualar (4) y (5) e, introduciendo la Condición de mínimo (1), se puede escribir:

$$\frac{EG.tCE}{GI.tEF} = \frac{CG(tCG - tCL)}{GD(tLD - tGD)} = \frac{CG}{GD} \qquad (6)$$

Basta con evaluar la relación de tiempos tCE/tEF para encontrar la ecuación diferencial buscada. Bernoulli utiliza la ley de Galileo:

$$dt = \frac{ds}{v} \quad \text{ó} \quad v^2 = 2gs$$

y obteniene para tCE la relación

$$\frac{CE}{\sqrt{2gHC}}$$

y para tEF una expresión análoga. La ecuación (6) se puede escribir:

$$\frac{EG.tCE}{GI.tEF} = \frac{\dfrac{EG}{\sqrt{HC}}}{\dfrac{GI}{\sqrt{HE}}}$$

Y finalmente

$$\frac{\dfrac{EG}{\sqrt{HC}}}{\dfrac{GI}{\sqrt{HE}}} = \frac{CG}{GD} \qquad (7)$$

Es en este momento cuando Jacques introduce las coordenadas afirmando: *"Reducido a un problema puramente geométrico, determina la curva cuyos elementos son directamente proporcionales a las abscisas e inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de las ordenadas".*

Escogiendo la horizontal AH como eje de las x y la perpendicular HC como eje de las y, (7) se escribe:

$$ds = k\,\frac{dx}{\sqrt{y}}$$

Poniendo $k = \sqrt{2r}$, se tiene:

$$dx = dy\,\sqrt{\frac{y}{2r - y}}$$

ecuación diferencial de una cicloide invertida, que tiene el eje de las x como base y cuyo círculo generador es de diámetro 2r. Jacques Bernoulli lo demuestra de un modo usual en el siglo XVII, construyendo una semi-cicloide invertida y mostrando que satisface a la condición (7).

Jacques Bernoulli ha sabido aceptar los múltiples desafíos del problema. Aunque complicado y laborioso, el método utilizado es de una riqueza y de una fecundidad extraordinarias, sobre todo si se tienen en cuenta los medios relativamente rudimentarios que el cálculo leíbniciano de las diferenciales que ponía a su disposición. Profundamente innovador, prefigura, bajo forma geométrica, los métodos que serán elaborados posteriormente en el Cálculo de Variaciones. Leonard Euler, en los años 1730/1740, se inspirará en ellos para establecer en su obra *"Methodus invenniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes 1744)"* la famosa ecuación de Euler-Lagrange, fundamental en el Cálculo de Variaciones. ▌