El obscuro origen y la agitada juventud del número e

Autor: Ignacio Fernández de Aguirre

El noble escocés **John Napier**, **Napair** o **Neper** (1550-1617) barón de **Merchiston**, se había formado en teología y matemáticas, aunque más atraído por lo primero investigó y publicó una exégesis del Apocalipsis de San Juan, incluida una predicción del fin del mundo para finales del siglo XVII, que afortunadamente no se cumplió. Sin embargo esa faceta astrológica, por la cual las malas lenguas populares le situaban hasta en prácticas de magia, le hizo también preocuparse por el problema que los astrónomos tenían para realizar sus cálculos. En esa época ya se disponía de tablas trigonométricas con siete decimales, y no cabe duda de que los cálculos, incorporando multiplicaciones y divisiones, resultarían largos, engorrosos y sujetos a errores. Un relojero suizo, **Joost Bürgi** (1552-1632), fue quizá quien primero intuyó la vía para solucionarlo, pero

John Napier (NEPER) no llegó a conocer a su hijo natural, el número e

demoró su publicación y fue Neper quien dio a la imprenta en 1614, con el apoyo y ayuda del matemático inglés **Henry Briggs** (1561-1630) la descripción de la "*maravilla de los logaritmos*".

Para nosotros está ahora muy claro el significado del logaritmo de un número real. Se trata del exponente al que debemos elevar una base para obtener ese número.

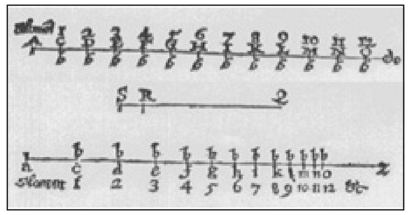
$\mathbf{N = b^L}$; por lo que decimos que:

El logaritmo de **N** en base **b** es **L**.

De ese modo unas operaciones de multiplicación o división, se convierten en sencillas sumas o restas, siempre que dispongamos de las correspondientes tablas para encontrar los logaritmos de los números en esa base y viceversa.

Pero no es así como lo veía Neper, ya que no tenía el concepto de base y de que los logaritmos de los números eran el exponente al que se eleva la base para obtenerlos. Quizá basándose en unas reflexiones de **Arquímedes**, utilizó el símil de dos puntos moviéndose a lo largo de rectas, el uno con una velocidad uniforme y el otro con una velocidad decelerada a medida que avanzaba. Ello equivalía a crear dos listados de números, uno en sucesión aritmética y otro paralelo en sucesión geométrica, ambos en correspondencia. La sucesión aritmética correspondería a los logaritmos de la geométrica y las operaciones de multiplicación y división entre cifras de la segunda equivaldrían a sumas y restas en la primera. Para hacerlo operativo, eran necesarias unas tablas de equivalencia entre ambas series, de manera que fuera posible encontrar con rapidez tales equivalencias.

Originalmente, la serie geométrica ideada por Neper, pensada para



Líneas aritmética y geométrica usadas por Neper para el razonamiento.

valores de senos, se iniciaba en 10.000.000 (ya que eran siete los decimales que tenían las tablas trigonométricas usadas en su tiempo) y el valor (1 – 1/10.000.000), o sea 0,9999999, el usado como multiplicador; la serie aritmética era la de los números enteros, correspondiendo al primero, 10.000.000 el valor 0, al segundo el 1, y así sucesivamente.

Está claro que una vez construida la tabla, las operaciones de multiplicación o división entre las cifras de la serie geométrica, son mucho más sencillas en forma de sumas o restas en la aritmética, y las tablas se podían completar interpolando adecuadamente valores entre los calculados de partida.

Lo que no sospechaba Neper es que el valor con que estaba multiplicando la cifra inicial de la serie geométrica, $(1 - 1/s)^n$, con un valor de s grande y cuanto más se avanzase en la generación de cifras de la progresión geométrica, n cada vez mayor, se aproximaría nada menos que al límite de $\mathbf{(1 - 1/n)^n = 1/e}$.

Briggs deseaba completar y mejorar la *descripción* que Neper había hecho de los logaritmos en su obra inicial y, tras nuevos viajes entre Londres y Edimburgo, acordaron que era más práctico calcular unas tablas que fueran en sucesión decimal, con 1 como logaritmo de 10 y 0 como logaritmo de la unidad. Briggs extrajo

54 veces la raíz cuadrada de 10 y a cada paso le asignaba el logaritmo correspondiente a dividir por 2 el anterior, así:

Logaritmo de 10 sería 1.
Logaritmo de 3,162277...sería 0,5.
Logaritmo de 1,778279…sería 0,25.

Y así sucesivamente. Interpolando geométrica o aritméticamente las series respectivas tendríamos una completa tabla de lo que serán en adelante los logaritmos decimales. Tras la muerte de Neper, su hijo publicó aun unas tablas, construcción de la "*maravilla de los logaritmos*", con las mismas ideas de su progenitor, pero casi simultáneamente, Briggs describió su teoría decimal y en 1624 salieron las tablas definitivas según ella. Pronto casi todos los astrónomos de la época, como Kepler, las usaron habitualmente. En honor del primer descubridor, se denominan actualmente logaritmos naturales o neperianos (**ln**) a los de base **e**.

Además de la utilización práctica, muchos matemáticos fueron aportando diferentes puntos de vista al concepto manejado: **Saint Vincent** en 1647, buscando áreas bajo la hipérbola yx=1; **Huygens** en 1661, definiendo lo que podrían ser curvas "logarítmicas"; **Mercator** en 1668, llamando logaritmo "natural" a los primigenios descritos por Neper; **James Gregory** proponiendo logaritmos hiperbólicos; **Leibniz** en 1690, denominando en una carta a Huygens como **b** a una cifra que había calculado **Bernoulli** y que repetitivamente encontraban en varios de sus cálculos. Pero ¿quién era ese Bernoulli y de qué cifra se trataba?

Algunos años antes de la publicación de los libros de Neper, D. **Fernando Álvarez de Toledo**, Duque de Alba, reprimía con dureza a los protestantes en Flandes, y uno de ellos, **León Bernoulli**, decidió emigrar con su familia a la calvinista Suiza, estableciéndose en Basilea. A uno de sus nietos, llamado Jacobo (1654-1705), aunque orientado por su padre a estudios eclesiásticos, le sedujeron más las matemáticas y la astronomía, fascinado por las teorías de las series y el cálculo diferencial. En una de sus deducciones se planteó la pregunta de cuál sería el resultado de imponer la unidad dineraria al 100% de interés compuesto anual a medida que fuésemos acortando el plazo de incorporación de intereses al capital. Veamos el resultado.

Si imponemos 1 € al 100%, a final de año es evidente que dispondremos de 2 €.

Si el interés obtenido a mitad del año, 0,5 €, lo sumamos al capital para producir a su vez en el segundo semestre, resultará:

(1 + 0,5) + 0,75 = 2,25 €, que no es otra cosa que $\mathbf{(1 + ½)^2}$. Si dividimos el año en n partes, lo obtenido será pues $\mathbf{(1 + 1/n)^n}$ y la cantidad a obtener más elevada sería indudablemente su límite cuando n tiende a infinito. Calculando con un número alto de divisiones anuales, esta cantidad ascendía a **2,7182**…€, misterioso número que, desde la cuna comenzó a intrigar a los matemáticos, ya que aparecía impensadamente en problemas de índole muy diferente. Insistimos en que aun no se veía el carácter exponencial de los logaritmos ni la incidencia de sus bases, pero ya estaban cerca de determinarlo.

Leonhard Euler, padre adoptivo y mentor juvenil del número e

Un hermano de Jacobo, llamado Johan, era también reputado matemático, generándose entre ambos agrias disputas y controversias. **Johan Bernoulli**, padre a su vez de Daniel, que más adelante formularía el conocido principio de la hidráulica, daba clases particulares a un muchacho, también de Basilea, a quien igualmente deseaban dirigir a cargos eclesiásticos pero que manifestaba elevadas dotes científicas: se trataba de **Leonhard Euler** (1707-1783).

Euler una vez graduado, desarrolló sus actividades principalmente entre San Petersburgo y Berlín, produciendo una ingente obra científica. Ciñéndonos a nuestro tema, no solo demostró el límite de la expresión propuesta por Bernoulli para el citado interés compuesto, sino que determinó el mismo resultado para otros varios planteamientos de cálculo, como que e = 1 + 1 / 1! + 1 / 2! + 1 / 3! +...+ 1 / n! y que también se la encuentra en el desarrollo de fracciones continuas,

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\dots}}}}}$$

, o

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\dots}}}}}}}}$$

Pero una importante aportación suya, fue fijar definitivamente el carácter exponencial de los logaritmos y demostrar que el valor de la derivada para la función **y = e**^{x} en el punto 0 es el mismo que el de la función, es decir 1.

Es anecdótico, aunque tiene su gracia, que diese el nombre **e** al número en cuestión, al parecer no precisamente por la inicial del suyo propio, sino por la continuidad vocal con una **a** que estaba utilizando.

A partir de este momento, cada vez fueron más frecuentes las apariciones en público de nuestro número **e**, y eso en casi todas las ramas matemáticas. A las ya citadas se pueden unir entre otras muchas:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

x^x es mínimo si $x = 1/e$,

$x^{1/x}$ es máximo si $x = e$, o la bellísima expresión $e^{i\cdot\pi} + 1 = 0$ conocida como ***identidad de Euler***, que plasma la íntima relación entre los cuatro números fundamentales de nuestras matemáticas.

Los logaritmos hechos con los cálculos de **Briggs**, aumentan al crecer el número, al contrario de los propuestos por **Neper**, pero existe una relación íntima entre el valores del logaritmo de un número según Neper y el del logaritmo en base **e** (los actuales neperianos) del inverso del número considerado.

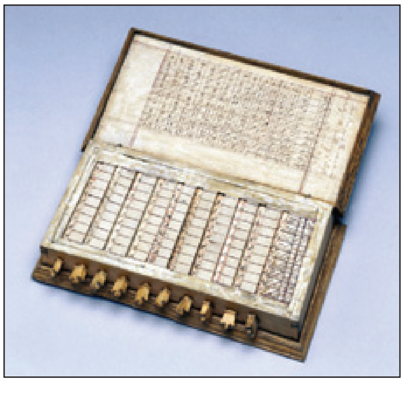
Tampoco los cálculos de probabilidades escaparon de ser uno de sus lugares favoritos de aparición. Supongamos que un jugador practica una apuesta n veces en las que gana el 1/n de ellas. ¿Cuál sería la probabilidad de perder siempre si n es infinitamente grande? Dejamos a las inquietudes de los lectores la búsqueda de solución, aunque allí encontrarán con seguridad al número **e**.

De aquí al reconocimiento de su mayoría de edad solamente había un paso y éste lo dio **Carl Friedrich Gauss** con su ley y fórmula que expresa la densidad de probabilidad de una variable aleatoria absolutamente continua:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde μ es la media de los valores de la variable y σ la desviación típica o estándar de los mismos.

Definitivamente, el número **e** quedará claramente clasificado como *irracional* (no deducible de una fracción entre reales enteros) y *trascendente* (no obtenible como solución de una ecuación algebraica)



Caja con los "huesos de Napier"

Puede que al conocer la llamada fórmula de la campana de Gauss, los huesos del viejo Neper se revolviesen de placer en su tumba. Y nada mejor dicho, pues hablando de huesos, así, "huesos de Napier", llamó el vulgo al artefacto que el noble escocés construyó con barritas numeradas de marfil, un elegante sistema de operar, híbrido entre ábaco y calculadora. Pero eso ya es otra historia que puede encontrarse fácilmente en la moderna herramienta de la web.

Y como termina Neper el libro de su *descripción*:

Que quien recoja el fruto de este pequeño trabajo, pague tributo de gloria y agradecimiento a Dios, autor soberano y dispensador de todos los bienes.

Que quien recoja el fruto de este pequeño trabajo, pague tributo de gloria y agradecimiento a Dios, autor soberano y dispensador de todos los bienes