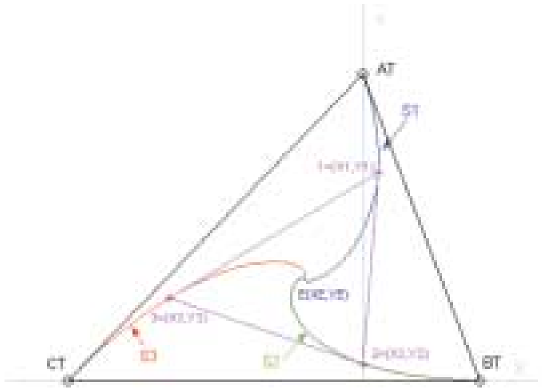
Director de la revista DYNA

Santander, 10 de marzo de 2003

Estimado amigo:

Adjunto, en fichero añadido, una solución al problema planteado por D. Juan Ramón Ruiz Tolosa de título *"Un problema de trayectorias"*, aparecido en el ejemplar de Dyna correspondiente a los meses Enero-Febrero de 2003, por si consideras adecuada su publicación.



a) Sean S_1, S_2 y S_3, las trayectorias que describen los espías y $1=(x_1,y_1)$, $2=(x_2,y_2)$, $3=(x_3,y_3)$ las posiciones que ocupan cada uno de ellos en un instante dado.

Atendiendo al enunciado, los módulos de las velocidades respectivas (celeridades) en las posiciones indicadas, vienen dadas por:

$$|v_1| = \frac{dS_1}{dt} = k\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}, \qquad (1)$$

$$|v_2| = \frac{dS_2}{dt} = k\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}, \qquad (2)$$

$$|v_3| = \frac{dS_3}{dt} = k\sqrt{(y_1-y_3)^2+(x_1-x_3)^2} \qquad (3)$$

Las coordenadas de los puntos 1, 2, 3 varían con el tiempo. Analizando separadamente la variación temporal de cada una de las coordenadas, tomando como ejemplo la variación de x_1, se tiene:

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{dS_1}\frac{dS_1}{dt} = \frac{dx_1}{dS_1}|v_1| \qquad (4)$$

siendo $\frac{dx_1}{dS_1} = \frac{dx_1}{\sqrt{dx_1^2+dy_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2}}$ y, de acuerdo con el enunciado $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

que, sustituidas en la ecuación (4), permiten poner:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(y_2-y_1)^2}{(x_2-x_1)^2}}}k\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2} = k(x_2-x_1)$$

Procediendo de modo análogo para el resto de coordenadas, se obtienen:

$$\dot{x}_1 = k(x_2-x_1) \qquad (5) \qquad\qquad \dot{y}_1 = k(y_2-y_1) \qquad (8)$$

$$\dot{x}_2 = k(x_3-x_2) \qquad (6) \qquad\qquad \dot{y}_2 = k(y_3-y_2) \qquad (9)$$

$$\dot{x}_3 = k(x_1-x_3) \qquad (7) \qquad\qquad \dot{y}_3 = k(y_1-y_3) \qquad (10)$$

Sumando (5), (6), (7) de una parte, y de otra (8), (9), (10), resultan las expresiones:

$$\boxed{\dot{x}_1+\dot{x}_2+\dot{x}_3 = 0 \qquad (11)} \qquad\qquad \boxed{\dot{y}_1+\dot{y}_2+\dot{y}_3 = 0 \qquad (12)}$$

que, una vez resueltas, dan:

$$\boxed{x_1+x_2+x_3 = C_1 \qquad (13)} \qquad\qquad \boxed{y_1+y_2+y_3 = C_2 \qquad (14)}$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan a partir de la posición inicial A_T, B_T, B_T de los espías

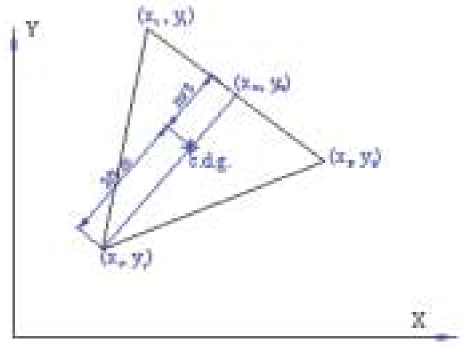
$$\boxed{C_1 = x_{AT}+x_{BT}+x_{CT} \qquad (15)} \qquad\qquad \boxed{C_2 = y_{AT}+y_{BT}+y_{CT} \qquad (16)}$$

En el punto de encuentro, las coordenadas de los tres puntos son idénticas, por tanto:

$$3x_E = C_1 = x_{AT} + x_{BT} + x_{CT} \longrightarrow \boxed{x_E = \frac{x_{AT} + x_{BT} + x_{CT}}{3}}$$

$$3y_E = C_2 = y_{AT} + y_{BT} + y_{CT} \longrightarrow \boxed{y_E = \frac{y_{AT} + y_{BT} + y_{CT}}{3}}$$

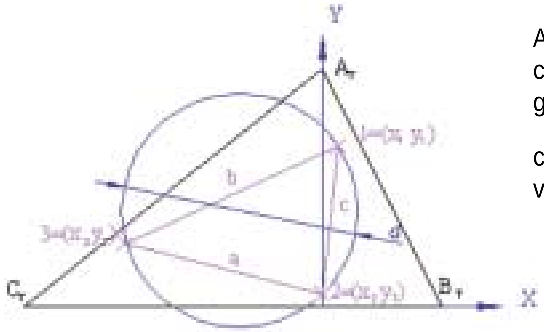
“Las coordenadas del punto de encuentro de los espías (x_E, y_E), son media aritmética de los valores de las coordenadas respectivas x e y en las posiciones AT, BT, CT iniciales”



b) El centro de gravedad de todo triángulo se sitúa sobre sus medianas en un punto distante de los vértices 2/3 del valor de la mediana correspondiente. En cualquier sistema cartesiano ortogonal, las coordenadas del c.d.g. pueden ponerse de la forma:

$$X_G = x_1 + \frac{2}{3}(x_m - x_1) = x_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x_1\right) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y_G = y_1 + \frac{2}{3}(y_m - y_1) = y_1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_2 + y_3}{2} - y_1\right) = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$



Atendiendo al resultado obtenido en el apartado anterior, podemos concluir que el punto de encuentro de los espías es el baricentro del triángulo A_T, B_T, C_T.

c) El valor del radio de curvatura en un punto de la trayectoria S1, viene dado por la expresión:

$$\rho_1 = \frac{\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right)^{3/2}}{\dot{x}_1 \ddot{y}_1 - \dot{y}_1 \ddot{x}_1} \qquad (17)$$

donde:

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt} = k(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = k\left[k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1)\right] \qquad (18)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{d\dot{y}_1}{dt} = k(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = k\left[k(y_3 - y_2) - k(y_2 - y_1)\right] \qquad (19)$$

Sustituyendo (5), (8), (18), (19) en (17), resulta:

$$\rho_1 = \frac{k^3\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]^{3/2}}{k^3(x_2 - x_1)\left[(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)\right] - k^3(y_2 - y_1)\left[(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1)\right]} = \frac{(c^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{c^3}{2\,Area(1,2,3)}$$

De idéntica forma, para las trayectorias S_2 y S_3 se obtiene:

$$\rho_2 = \frac{a^3}{2\,Area(1,2,3)} \quad y \quad \rho_3 = \frac{b^3}{2\,Area(1,2,3)}$$

Multiplicando los radios de curvatura queda:

$$\boxed{\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \frac{a^3 b^3 c^3}{\left[2\,Area(1,2,3)\right]^3} = d^3}$$

siendo *d* el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo que forman en cada instante las posiciones de los espías.

Atentamente

Delfín Silió Salcines
Ingeniero Industrial
Universidad de Cantabria

Nota: Como se ha demostrado, el producto de los radios de curvatura, en cada instante, es igual al cubo del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo que forman, en ese mismo instante, las posiciones de los espías. En el enunciado del problema se pide demostrar que el producto de los radios de curvatura es, *en cada instante,* igual al cubo del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo A_T, B_T, C_T; evidentemente esto no se verifica, salvo en la posición inicial.