11 de mayo de 2005

Estimado director,

En relación a la cuestión c) del Problema de Fermat propuesto en la revista (DYNA jul-ago-sep 2004), adjunto la respuesta al mismo. Si no pudieran publicarla, les agradecería se la hicieran llegar al compañero **Luis María Aznar** ya que está interesado en ella según indica en el número de DYNA de abril 2005.

Atentamente,
Pedro L. Clavería Vila,
Ingeniero Industrial

Problema:

Dado un triángulo acutángulo arbitrario, determinar un punto **F** de su plano tal que la suma de sus distancias a los tres vértices sea mínima. **Pierre de Fermat** propuso este problema al que dio la siguiente solución geométrica:

Se construyen sobre cada lado del triángulo dato, y hacia el exterior, tres triángulos equiláteros. Las tres circunferencias circunscritas a estos triángulos citados concurren en un punto **F**, solución del problema.

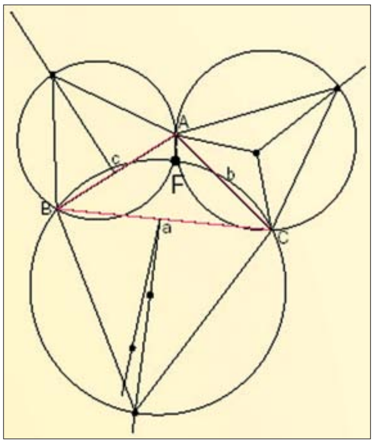

Fig. 1 Representación y solución gráfica del problema de Fermat

Se desea dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) Demostrar que la solución dada por **Fermat** corresponde a la exigencia del enunciado.

b) ¿Por qué las citadas circunferencias concurren en un punto único?

c) Siendo *A, B, C* las medidas de los lados del triángulo **ABC** dado, expresar la distancia mínima como función de A, B, C:

FA + FB + FC = D (*A, B, C*)

Introducción

Considerando el sistema de coordenadas representado en la Fig. 2, la distancia entre el punto F y los vértices del triangulo podemos expresarlo como:

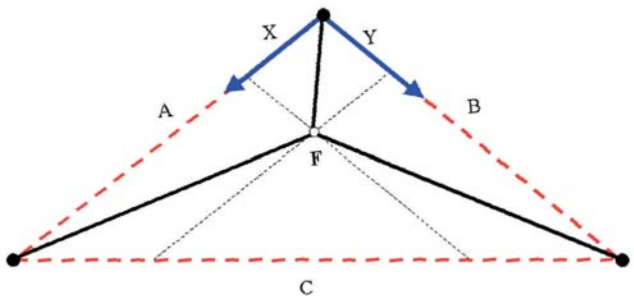

Fig. 2 Sistema de coordenadas oblicuo

$$D(X,Y)=\sqrt{X^2+Y^2+2XY\cos\theta}+\sqrt{(A-X)^2+Y^2-2(A-X)Y\cos\theta}+\sqrt{X^2+(B-Y)^2-2X(B-Y)\cos\theta} \quad (1)$$

con, $\cos\theta=\dfrac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$ (2)

podemos normalizar la ec. (1) utilizando las siguientes variables reducidas,

función: $d=\dfrac{D}{C}$ coordenadas: $x=\dfrac{X}{A}$ $y=\dfrac{Y}{B}$ parámetros: $a=\dfrac{A}{C}$ $b=\dfrac{B}{C}$

resultando,

$$\mathbf{d}(x,y) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 + (a^2 + b^2 - 1)\,x\,y} + \sqrt{a^2 (1-x)^2 + b^2 y^2 - (a^2 + b^2 - 1)(1-x)y} + \sqrt{a^2 x^2 + b^2 (1-y)^2 - (a^2 + b^2 - 1)\,x\,(1-y)} \qquad (3)$$

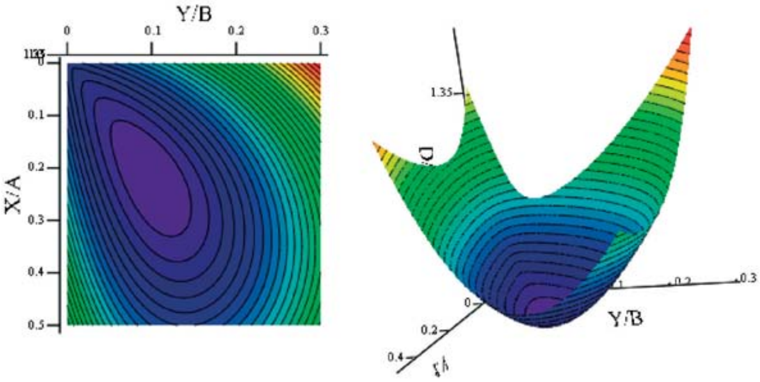

Fig. 3 Representación de la función d(x, y). a = 0.419, b = 0.838

Minimización de la distancia

El valor mínimo de la función d(x,y) lo calcularemos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\, d(x,y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\, d(x,y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4) \quad \text{resultando} \quad x_{min} = T(a,b) \qquad y_{min} = T(b,a)$$

siendo

$$T(x,y) := \frac{\sqrt{3}\cdot y^2\cdot\sqrt{(2\cdot x\cdot y)^2 - (x^2+y^2-1)^2} + (x^2+y^2-1)(y^2 - 2\cdot x^2 + 2) + 2\cdot x^2\cdot y^2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(2\cdot x y)^2 - (x^2+y^2-1)^2}\cdot\left[1 + x^2 + y^2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(2\cdot x y)^2 - (x^2+y^2-1)^2}\right]} \qquad (5)$$

La función buscada será $\mathbf{D}(A, B, C) = C \cdot \mathbf{d}(T(a, b), T(b, a))$ (6)

Casos especiales

1) $\theta = 90^o$ $\quad T(x,y) = \dfrac{(\sqrt{3}\,y + x)\,y}{2\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{3}\,x\,y)}$ (7)

2) $\theta \geq 120^o$ $\quad T(x, y) = 0 \qquad \mathbf{D}(A, B, C) = A + B$ (8)

3) $A = B \qquad T(a, b) = T(b, a) \quad X_{min} = Y_{min}$ (9)

Aplicación práctica

Para el triángulo de la Fig.1 con A = 220, B = 220 y C = 345, obtendremos los siguientes resultados,

$X_{min} = 32{,}685 \quad Y_{min} = 32{,}685 \qquad D = 434{,}091$