UN POETA MATEMÁTICO *

José Miguel Marañón, Dr. Ingeniero Industrial

El dedo que se mueve escribe; teniendo una orden avanza; ni tu piedad ni tu ingenio le harán retroceder para suprimir media línea, ni borrarán tus lágrimas una sola palabra

Omar Khayyâm (1048? -1122)
(Rubayat)

Célebre por sus innumerables cuartetos, el poeta persa **Omar al-Khayyâm** dedicó gran parte de su vida a las Matemáticas y a la Astronomía con sus correspondientes ecuaciones. Fue el primero en establecer una teoría geométrica de las ecuaciones de 3er grado, reforzando así la relación entre el Álgebra y la Geometría.

A la vez poeta, músico, filósofo, físico, astrónomo y matemático, fue un pensador especialmente fecundo ya que, entre sus numerosos escritos conocidos, se reflejan tanto la calidad como la originalidad de su producción. Ambas características destacan en las disciplinas científicas y especialmente en el campo de las Matemáticas donde intervienen las ecuaciones.

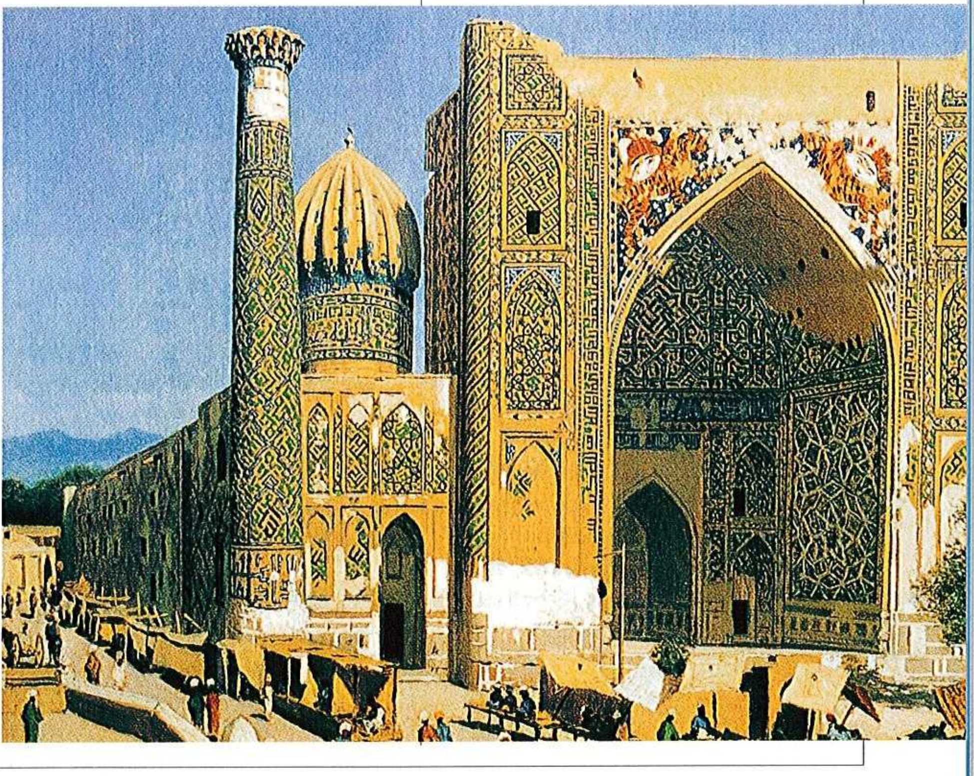
Aunque sus obras son hoy conocidas en su mayor parte, muchos aspectos de su vida continúan aún llenos de misterios. Se sabe que nació en Nishapour (hoy Irán) en 1408, es decir, después de la conquista de Khurasan por los turcos selyúcidas. Al parecer, pasó toda su infancia y adolescencia en Balkh, una ciudad vecina, donde adquirió una formación sólida en Ciencia y Filosofía.

Nada se sabe en cuanto a sus fuentes matemáticas pero se supone que muy bien podrían haber sido los *Elementos* de **Euclides**, las *Crónicas* de **Apolonio** y el *Álgebra* de **al-Khwarizmî.**

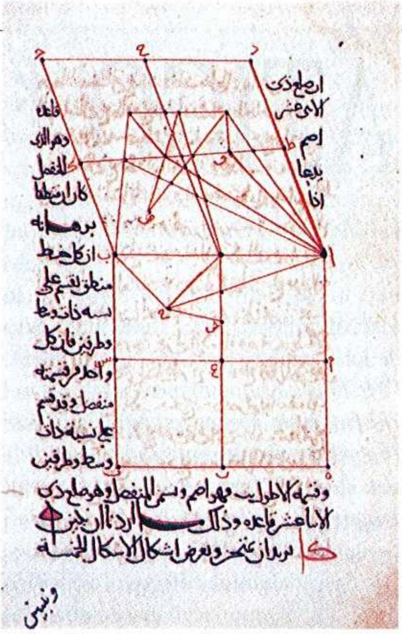
Tampoco se sabe cuándo comenzó a escribir sus artículos científicos, pero parece que uno de los primeros, antes de cumplir sus 22 años, fue un estudio geométrico-algebraico de unas 10 páginas titulado: *"Epístola acerca de la división del cuadrante"*.

Las condiciones que acompañaban a sus primeros estudios no le eran muy favorables a deducir de uno de los párrafos de su libro de Álgebra: *"Me ha sido imposible consagrarme exclusivamente a estos temas ni a pensar con perseverancia ante tantas vicisitudes. Nos encontramos afectados por el languidecer de los hombres de Ciencia"*. Se desconoce si tan amargas reflexiones dominaban al colectivo científico de la ciudad que acababa de abandonar o de la más prestigiosa de Samarcanda, que le había dado la bienvenida ante la invitación de un rico mecenas.

Hay que decir que, a partir de su control en 712 por los ejércitos musulmanes, Samarcanda continuó su desarrollo y, a finales del siglo VIII, era la primera ciudad del Imperio que tenía una fábrica de papel. Su dinamismo económico alcanzó el apogeo en el siglo X bajo la dinastía persa de los Samánidas. Durante este



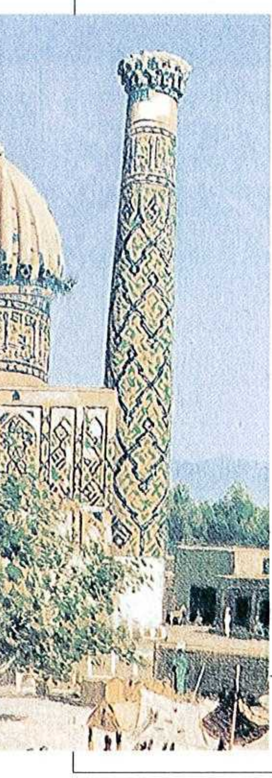
Una joya del Asia Central: Samarcanda. Escuela de Ser dor, por V. Vereskiaguine, siglo XIX



Los textos de al-Khayyâm evidencian cómo asimiló las Matemáticas griegas especialmente Los Elementos de Euclides, en la imagen traducidos al árabe.

siglo, Samarcanda fue reconocida como capital económica y foco intelectual importante capaz de rivalizar con Boukhara, capital de la región. Tanto, que su prestigio científico llegará a China. Este prestigio se mantuvo a lo largo de los siglos XI y XII, especialmente en el periodo coincidente con **al-Khayyâm.**

Por razones que no han llegado hasta nosotros, **al-Khayyâm** se desplazó a Ispahan donde vivió 18 años tranquilos y fecundos en los mundos científico, filosófico y literario, pero con especial énfasis en el matemático.



La Astronomía tampoco le fue ajena; dirigió un grupo de sabios en el Observatorio de Ispahan donde prepararon unas tablas astronómicas. Hacia 1070, llevó a cabo un trabajo colectivo importante encargado por el sultán **Malik Shah** para reformar el calendario.

Astrónomo, matemático, filósofo y poeta

Disfrutó con todas estas actividades y en 1077 completó su *"Epístola sobre la explicación de las premisas problemáticas del Libro de Euclides"*. A partir de 1080, publicó una serie de textos sobre distintos temas filosóficos debatidos por entonces adhiriéndose al pensamiento del gran filósofo y médico **Avicena**, que había fallecido en 1037. En esta época comenzó también a escribir sus cuartetos famosos y se le han atribuido tantos que muy probablemente no haya sido autor de todos ellos (1).

Tras el fallecimiento del sultán **Malik Shah**, en 1092, pareció caer en desgracia precisamente por las relaciones privilegiadas que había mantenido con el equivalente de su primer ministro **Nizám al-Moulk**. Los adversarios de éste tomaron el poder y aumentó la influencia de los teólogos ortodoxos.

Todos estos acontecimientos y el cambio del peso en la balanza del poder tuvieron como primera consecuencia la supresión de las subvenciones destinadas al observatorio y a la paralización de la confección de las tablas astronómicas junto con las demás actividades. En consecuencia, no se concluyó la reforma del calendario.

En cuanto a sus actividades durante los 25 años posteriores, sólo se sabe que, bajo el reinado de **Sanjár,**

Crece el universo de las ecuaciones resueltas

Cuando al-Khayyâm empieza sus investigaciones algebraicas, ya existían numerosas ecuaciones con sus soluciones:

Al-Mahâmi (siglo IX):	$x^3 + c = ax^2$
Al.Kouhî (siglo X):	$x+y=10;\ x^2+y^2+x/y=72$
	$x^3+(13+1/2)\,x+5=10\,x^2$
Anónimo (siglo X):	$x^4+200x=20\,x^3+1900$
Abou I-joud (siglo X)	$x^3+1=3\,x$
Ibn al-Haytham (siglo XI):	$x+y=10;\ x=y^3$
	$x^3+301x=1000+30\,x^2$
Al-Bîrûnî (siglo XI):	$x^3=3x+1$

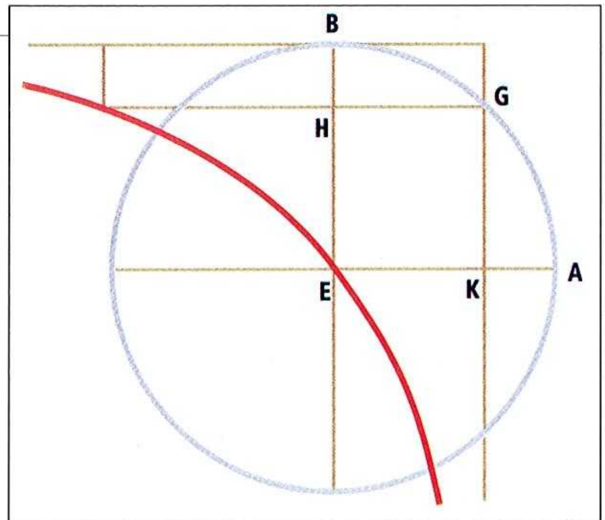
(1) En el Hotel Omar al-Khayyâm del Cairo, antiguo palacio del Rey ***Faruk****, pueden verse algunos de estos cuartetos al igual que en muchos hoteles de Viena figuran partituras musicales en sus paredes (Nota de la R.)*

tercer hijo de **Malik, al-Khayyâm** dejó Ispahan para instalarse en Marw, capital de los Selyúcidas, donde se cree que escribió dos obras sobre Estática (por aquel entonces, la Estática comprendía el estudio teórico de las palancas y los equilibrios).

Regresó a su ciudad natal donde falleció en 1131.

Uno de sus estudiantes evocaba su muerte con este emotivo testimonio: *"Le oí decir: Cuando yo muera, mi tumba estará en un lugar sobre el que sople la brisa del norte y se amontonen las flores y las rosas". "Me sorprendió su propósito porque yo estaba convencido de que sólo hablaba con conocimiento de causa. Y en el año 530 de la Héjira (1135-36) me enteré de que la tierra había recibido a este gran hombre hacía cuatro años. Fui al santuario de Hira donde vi su tumba cerca de un muro de un jardín abandonado. Alrededor de la tumba había albaricoques en flor y una gran cantidad de flores se acumulaban sobre la tumba hasta recubrirla casi totalmente. Recordando lo que dijera en Balkh, no pude evitar el llanto".*

Pero la imagen dominante de **Omar** es la del poeta, lo que supone haber olvidado su mayor aportación a la resolución de ecuaciones algebraicas. Los matemáticos de los países del Islam buscaban fórmulas que les permitieran resolver las ecuaciones de 3er grado, pero todo era inútil. Decepcionados, se volvieron hacia métodos de cálculo por aproximación y puede ser el fracaso de sus intentos lo que impulsara a **al-Khayyâm** a interesarse también por estos cálculos aproximados.



Sea como fuere, anunció que había aportado en un libro una contribución original en este aspecto. Pero este libro nunca se encontró...

Describe así sus trabajos: *"Los indios disponen de métodos para determinar las raíces de cuadrados y cubos, basándose en una inducción* (fundada) *sobre unos pocos números; es decir el conocimiento de los cuadrados de nueve cifras, a saber, el cuadrado de uno, de dos, de tres [...] así como de los productos de uno por otro, es decir, el producto de dos por tres e igualmente para los casos similares. Hemos establecido un sistema para demostrar que estos métodos son exactos y conducen al objeto perseguido. Por otra parte, hemos multiplicado las formas, quiero decir que hemos demostrado cómo determinar las raíces del cuadrado-cuadrado, del cuadrado-cubo, del cubo-cubo y así sucesivamente algo en lo que nadie nos ha precedido".*

Por lo tanto, es posible que en esta obra **al-Khayyâm** haya ido más allá del cálculo aproximado de la raíz enésima de un número entero y haya investigado un cálculo aproximado de las soluciones positivas de las ecuaciones de 3er grado.

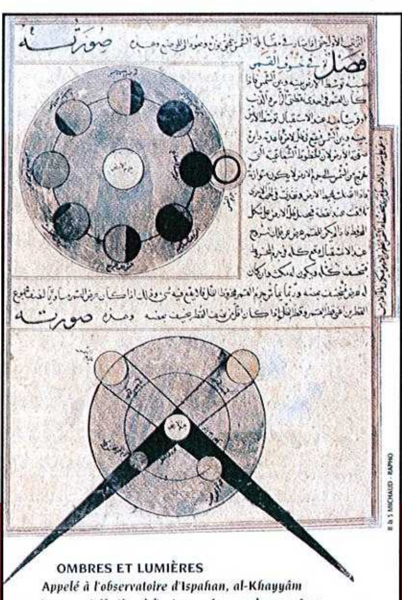
En Álgebra, su primer escrito (de unas 10 páginas) fue el titulado: *"La división del cuarto de círculo"*, donde muestra la posibilidad de dividir un cuadrante AB en dos partes, en un punto G (cuya proyección sobre el radio EB es H), situado de tal suerte que AE/GH = EH/HB (ver dibujo).

El análisis del problema conduce a una ecuación de 3er grado a la que **al-Khayyâm** aportó una primera solución geométrica empleando la intersección de un círculo y una hipérbola. Al no poder encontrar la solución algebraica (es decir, mediante una fórmula exacta), da un método para hallar una solución aproximada, que, según señala, *"permite aumentar la precisión hasta que el error sea despreciable"*.

Su segunda obra algebraica, titulada *"Tratado de Álgebra"*, es con mucho, el más importante de todos sus escritos matemáticos al contener, por primera vez en la historia, una teoría geométrica de las ecuaciones de 3er grado. En aquella época había para los matemáticos árabes 25 ecuaciones diferentes de grado inferior o igual a 3 y solamente operaban con ecuaciones de coeficientes positivos y con segundos miembros siempre distintos de cero. Entre estas 25 ecuaciones, seis (de grado inferior o igual a dos) habían sido ya estudiadas por **al-Khwârizmi** en su famoso libro de Álgebra.

Estas ecuaciones eran las siguientes:

$ax=\sqrt{x}$	$ax=c$	$b\sqrt{x}=c$
$ax+b\sqrt{x}=c$	$ax+c=b\sqrt{x}$	$b\sqrt{x}+c=ax$



LUCES Y SOMBRAS. Al incorporarse al observatorio de Ispahan, al-Khayyâm trabajó para la Astronomía musulmana. Junto con un equipo de sabios, estableció unas tablas astronómicas con vistas a reformar el calendario. (Eclipses, manuscrito árabe del siglo XIV) siendo a, b, c números positivos (enteros, racionales positivos, y tal vez, raíces cuadradas de enteros).

En cuanto a las 19 restantes, cinco son de 3er grado pero se pueden convertir, mediante un cambio de variable, en una de las seis anteriores. Quedan, por lo tanto, 14 ecuaciones cuyo estudio se ha acometido (con frecuencia sin gran éxito) por los predecesores de **al-Khayyâm**.

Círculo, parábola e hipérbola como instrumentos

En su Tratado comienza por proponer una clasificación de las 25 ecuaciones (ver cuadro) para después estudiarlas en su forma general, es decir, con coeficientes cualesquiera. Aporta soluciones geométricas obtenidas como intersecciones de dos cónicas (círculo, parábola e hipérbola) aunque no señala cómo encuentra las curvas en cuestión pero resulta inconcebible que las haya descubierto por casualidad. Según toda evidencia, partía de la ecuación a la que buscaba una solución positiva, suponiendo que existía dicha solución.

A continuación, procedía mediante análisis (2), deduciendo cada vez relaciones entre los coeficientes de la ecuación y la solución buscada. Esto le permitía, separando estas relaciones de dos en dos, conseguir las ecuaciones de dos cónicas. Este proceso parece ser el más plausible por ser una generalización natural del que habían seguido los griegos para conseguir la trisección de un ángulo.

Por el contrario, **al-Khayyâm** utilizó el método clásico de síntesis (2) para demostrar que la intersección de las dos curvas encontradas proporciona, cada vez, una o dos soluciones al problema.

La obra de **al-Khayyâm** será reanudada algunas décadas más tarde por **Sharaf al-Din al-Tousî**, otro matemático (fallecido en 1213), que utilizaría las mismas ecuaciones pero justificando tal vez de distinto modo la existencia de solución positiva para algunas de aquéllas. Así completaría este estudio de las ecuaciones presentando un procedimiento de aproximación muy elaborado, que le permitirá calcular valores aproximados de las soluciones positivas.

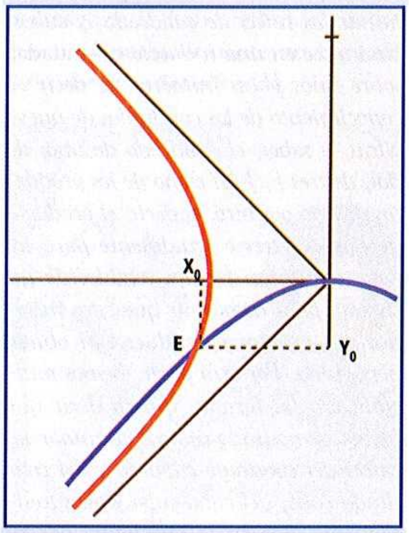
DOS CURVAS PARA UNA SOLUCIÓN

Para resolver una ecuación de la forma $x^3 + c = bx$, al-Khayyâm empleó dos curvas: una parábola (azul) de ecuación $x^2 = y\sqrt{b}$ y una hipérbola (rojo) de ecuación $y^2 = x(x - c/b)$ demostrando que la intersección de ambas (punto $E(x_o, y_o)$) es una de las soluciones que buscaba.

Al pertenecer E a la parábola, sus coordenadas cumplen la relación $x_o/y_o = \sqrt{b}/x_o$. Además, por pertenecer a la hipérbola, $x_o/y_o = y_o/(x_o - c/b)$.

De ambas relaciones se deduce $(\sqrt{b}/x_o)^2 = b/x_o^2 = x_o/(x_o - c/b)$ de donde $x_o^3 = bx_o - c$, es decir: $x_o^3 + c = bx_o$, que es la relación buscada.

En su Tratado, propone una clasificación de las 25 ecuaciones de grado inferior o igual a 3, relacionadas por los matemáticos árabes. Es una



clasificación puramente formal dado que se apoya solamente en el grado de cada ecuación y en el número de elementos que las componen.

1) Ecuaciones simples:

$x = a$; $x^2 = a$; $x^2 = ax$; $x^2 = ax^2$; $x^3 = ax$; $x^3 = a$

1) Ecuaciones compuestas

1) Trinomios:

$x^2 + ax = b$; $x^2 + b = ax$; $ax + b = x^2$; $x^3 + ax^2 = bx$;
$x^3 + bx = x^2$
$ax^2 + bx = x^3$; $x^3 + ax = b$; $x^3 + c = ax$; $b + ax = x^3$;
$x^3 + ax^2 = b$
$x^3 + c = ax^2$; $b + ax^2 = x^3$

2) Cuatrinomios:

$x^3 + ax^2 + bx = c$; $x^3 + ax^2 + c = bx$; $x^3 + bx + c = ax^2$
$c + bx + ax^2 = x^3$; $x^3 + ax^2 = bx + c$;
$x^3 + bx = ax^2 + c$; $x^3 + c = ax^2 + bx$

Hay que señalar que **al-Khayyâm** es uno de los que emplearon el Álgebra para resolver problemas que no pertenecían necesariamente a aspectos ni campos matemáticos y esto es lo que hace en un trabajo sobre Hidrostática que ha llegado hasta nosotros, en el que determina la composición de unas mezclas: después de proponer un método geométrico, "algebriza" el problema eligiendo una incógnita. Llegó así a una ecuación, que resolvió.

A pesar de que su contribución al desarrollo del Álgebra haya sido importante, su obra, escrita en árabe, no parece que circulara mucho fuera de las fronteras de Persia. Es más, hasta el presente, no se ha encontrado señal alguna de su influencia en la tradición matemática de la España musulmana ni en la tradición medieval europea. En la Historia no faltan ejemplos de grandes sabios, que, a semejanza de **al-Bîrûnî** (fallecido en 1048) y de **Ibn al-Haytham** (fallecido en 1039), han realizado obras matemáticas de alto nivel que fueron ignoradas en la Europa medieval.

Pero nada nos dice que sus trabajos no tuvieran una influencia indirecta, particularmente en la Escuela algebraica italiana del siglo XVI, que tendrá el privilegio de encontrar las fórmulas que dan las soluciones exactas a las ecuaciones de **al-Khayyâm**. ▌

** Transcripción del artículo original de Ahmed Diebbar publicado en Cahiers de Science et Vie*

(2) Para proceder al análisis se comienza suponiendo verdadera la propiedad que se va a demostrar. Si, por una serie de implicaciones, se llega a un resultado conocido, se habrá demostrado la veracidad de la proposición inicial. Proceder por síntesis consiste en proceder a la inversa: se parte de un resultado conocido y se trata de llegar, mediante una serie de implicaciones, a la propiedad que se desea demostrar.