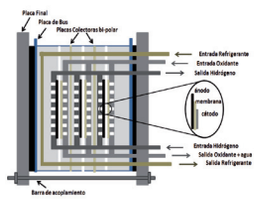
Diseño de un sistema de control pasivo tolerante a fallos en sensores para una pila de combustible modelada con un modelo lineal por tramos



Design of a fault tolerant passive control system in sensors for a fuel cell modeling by piecewise linear model

Julio C. Rodríguez-Cerda[1], Manuel Adam-Medina[1], Ilse Cervantes-Camacho[2], Ricardo Fabricio Escobar-Jiménez[1], J.F. Gómez-Aguilar[1]

[1] CENIDET. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. Dpto. de Ingeniería electrónica, Interior Internado Palmira, s/n – 62490 Cuernavaca, Morelos (México).

[2] Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica de San Luis Potosí (IPICyT). Camino a la Presa San José 2055 - 78216 San Luis Potosí (México).

DOI: http://dx.doi.org/10.6036/7647 | Recibido: 04/05/2015 • Aceptado: 05/05/2015

ABSTRACT

- OThis paper describes the design of a passive fault tolerant control for sensor temperature and pressure of a fuel cell type Proton Exchange Membrane (PEM-FC, for its acronym in English) is presented. The fault tolerant control is based on analytical redundancy using piecewise linear models (PWL, for its acronym in English) previously designed for a region of operation at steady state. The PEM-FC is modeled by a thermodynamic model and an electric model. The electrical model describing the dynamic behavior of the voltage generated by the PEM-FC and the thermodynamic model describing the dynamics of the temperature and pressure of the PEM-FC. Due to the dynamic nature of hybrid having the fuel cell and which works on set operating points, the linear systems approach is used for modeling piecewise stack. For the design of these systems they were developed different polytope (for regulating the voltage to the compressor motor, for regulating temperature and pressure of the PEM-FC) in order to ensure stability of the system even with the presence of faults . In this paper a law of feedback control outputs where the controlled variables is the battery voltage and temperature of the battery is used, the controller gains were calculated for each linear model of the battery at different points of operation, steady state, without failure and in the presence of faults. The control gains may change according to law in terms of the desired switching off the battery or sensor failure occurs where the voltage. The fault tolerant control scheme proposed for the PEM-FC is based on the Lyapunov stability theory in the formulation of Linear Matrix Inequalities.
- **Keywords:** Stability, Fault tolerant control, piecewise linear systems.

RESUMEN

En este artículo se presenta el diseño de un control tolerante a fallos pasivo para el sensor de temperatura y de presión de una Pila de Combustible tipo Membrana de Intercambio Protónico (PEM-FC, por sus siglas en inglés). El control tolerante a fallos se basa en redundancia analítica empleando modelos lineales por tramos (PWL, por sus siglas en inglés) previamente diseñados para una región de operación en el estado estable. La PEM-FC es modelada mediante un modelo termodinámico y un modelo eléctrico. El modelo eléctrico describe la dinámica del comportamiento del voltaje generado por la pila y el modelo termodinámico describe la dinámica de la temperatura y de la presión de la pila. Debido a la naturaleza híbrida de la dinámica que presenta la PEM-FC y de que se trabaja en puntos de operación establecidos, se emplea el enfoque de sistemas lineales por tramos para el modelado de la pila. Para el diseño de estos sistemas se desarrollaron diferentes politopos (para la regulación del voltaje al motor del compresor, para la regulación de temperatura y de presión de la PEM-FC) con la finalidad de garantizar la estabilidad del sistema incluso con presencia de fallos.

En este trabajo se emplea una ley de control por retroalimentación de salidas donde las variables controladas es el voltaje de la pila y la temperatura de la pila, las ganancias del controlador fueron calculadas para cada modelo lineal de la pila en diferentes puntos de operación, en estado estable, sin fallo y en presencia de fallos. Las ganancias de control pueden cambiar de acuerdo a una ley de conmutación en términos del voltaje deseado a la salida de la pila o del sensor en donde ocurra el fallo. El esquema del control tolerante a fallos propuesto para la PEM-FC está basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, en la formulación de Desigualdades Lineales Matriciales.

Palabras clave: Control tolerante a fallos, sistemas lineales por tramos, y Desigualdades Lineales Matriciales.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la industria ha incrementado el uso de sistemas automatizados, siendo estos cada vez más complejos, por lo que son más propensos a malos funcionamientos, fallos y hasta averías de sus sensores o actuadores, estos fallos pueden ocasionar grandes pérdidas económicas. Para solucionar problema ocasionados por el fallo de los sensores o actuadores de un sistema existen los sistemas de control tolerante a fallos, los cuales pueden contar con un sistema de monitoreo o supervisión y un sistema de diagnóstico de fallos, el cual analiza las mediciones o variables relevantes del proceso que pueden estar proclives a fallos. Mediante este sistema de supervisión con control tolerante a fallos, se analiza, detecta y diagnóstica los posibles fallos de un sistema. Así mismo, se toma acciones de acuerdo al tipo de fallo que ocurra en el proceso, estas acciones pueden ser reconfiguración o acomodación en la ley de control con la finalidad de compensar el fallo.

Los sistemas de *Control Tolerante a Fallos* (FTC, por sus siglas en inglés) reciben especial atención en la actualidad. En el trabajo

presentado en [3] se muestran algunas generalidades del control tolerante a fallos, así como herramientas para el análisis y diseño del sistema de diagnóstico y del control tolerante a fallos. El interés que se tiene sobre este tema radica en las ventajas que representa mantener en operación un proceso ante la presencia de fallos en sensores o actuadores, garantizando estabilidad y un desempeño aceptable del proceso en presencia de fallo. En [4] se presentan métodos, ideas y una combinación de herramientas matemáticas con el objetivo de diseñar sistemas de control con el fin de evitar que los fallos puedan ocasionar daños a los sistemas y reducir el riesgo por operación en condiciones con fallo. En [5] se muestra un panorama general de algunas técnicas utilizadas para el diseño del control tolerante a fallos, las partes que lo conforman, posibles problemas futuros que se deberán abordar y solucionar.

Para desarrollar una estrategia de control tolerante a fallos por redundancia analítica es necesario contar con un modelo matemático del proceso, validado experimentalmente, dicho modelo es empleado para desarrollar pruebas de estabilidad, controlabilidad, observabilidad del proceso. Existen diferentes enfoques para abordar el modelado de los procesos, como representaciones no lineales o lineales de éstos, dentro de los enfoques lineales para representación del proceso están los sistemas lineales por tramos que han recibido especial atención por parte de la comunidad científica de control, ya que gran parte de los sistemas no lineales pueden ser modelados por medio de esta representación PWL [6-8,12] así como diseño de observadores y controladores. Los autores en [13-16] establecen la equivalencia entre los sistemas PWL y algunas clases de sistemas híbridos. El análisis de estabilidad para cualquier sistema es un aspecto muy importante, este análisis permite determinar las condiciones de los puntos de equilibrio del sistema puede o no ser estable [9, 17-19].

En este trabajo el objetivo principal es proponer un control tolerante a fallos pasivo derivado de los conceptos estabilidad robusta de los trabajos presentados en [11,14,20,21]. En estos trabajos se consideran las funciones de Lyapunov polinomiales homogéneas y/o dependientes de parámetros para garantizar estabilidad del sistema con incertidumbres del tipo politópicas. Mediante estos conceptos se diseñan los controladores que dependiendo de la región donde ocurra el fallo sea posible reconfigurar el control para mantener su buen funcionamiento del sistema. Para mantener los objetivos de control se proponen dos leyes de control por retroalimentación de la salida, el primer lazo de control está diseñado para mantener un voltaje requerido a la salida de la pila de combustible y el segundo lazo de control está diseñado para mantener la temperatura de la pila de combustible con la manipulación del flujo de refrigerante. El diseño del control tolerante a fallos está enfocado en mantener estás dos leyes de control en operación incluso con la presencia de fallos en sensores. El esquema de control tolerante a fallos fue diseñado con la finalidad de diagnosticar el fallo de los sensores de temperatura y de presión de la Pila Combustible tipo Membrana de Intercambio Protónico.

El trabajo está organizado como sigue: en la sección 2 se muestra el control tolerante a fallos, en la sección 3 se presenta el modelo lineal por tramos (PWL), en la sección 4 se presenta la aplicación del control tolerante a fallos a la pila de combustible, sección 5 se presentan los resultados y simulaciones, por último en la sección 6 se muestran las conclusiones.

2. ESQUEMA DEL CONTROL TOLERANTE A FALLOS

En esta sección se presenta el esquema general del control tolerante a fallos que será empleado para realizar la detección y diagnóstico de fallos en sensores y su diseño mediante sistemas lineales por tramos.

El control tolerante a fallos pasivo que se presenta en este trabajo tiene información anticipada del sistema (debido a que se definen diferentes puntos de operación mediantes el modelado PWL) por lo que es posible diseñar el CTF para fallos específicos de acuerdo a la magnitud del fallo y tipo de fallo (es decir diseñan las matrices de estado de acuerdo a un tipo de comportamiento es-

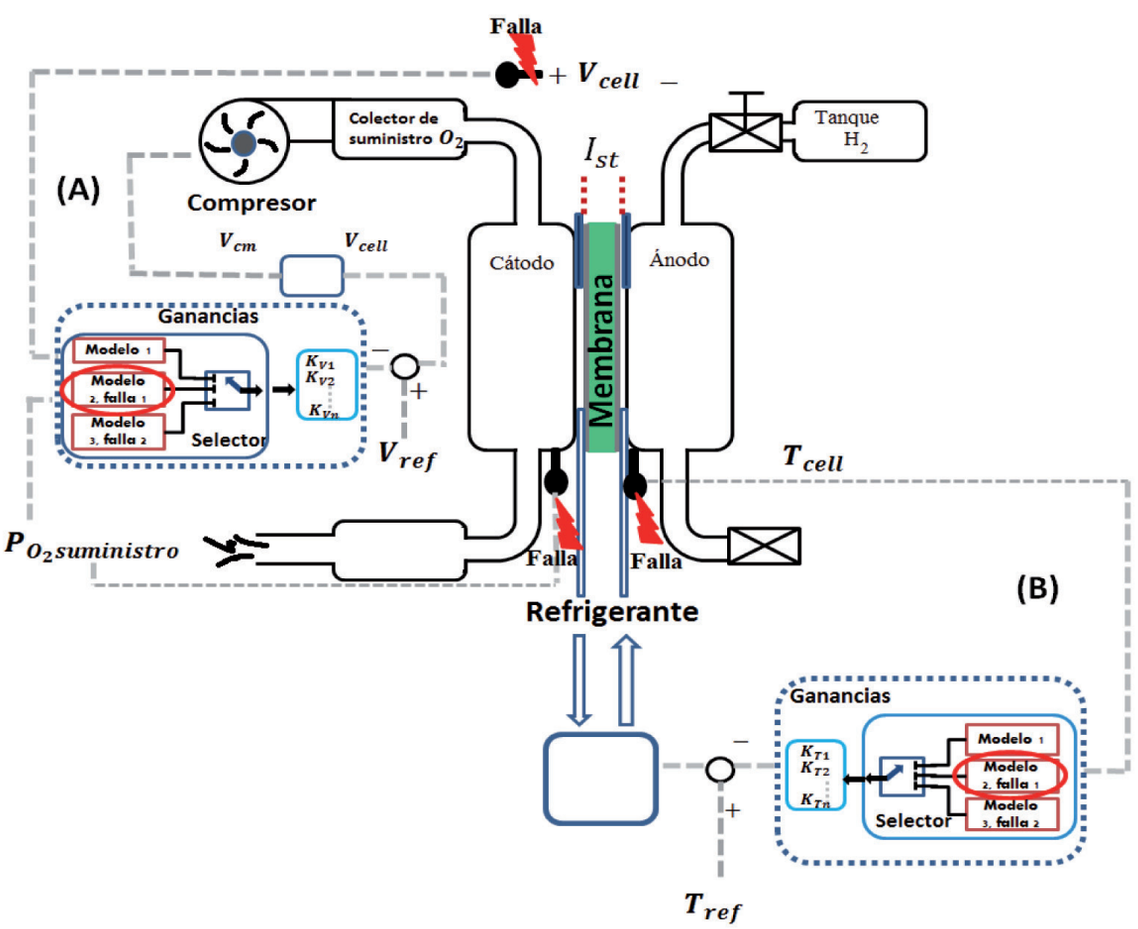


Fig. 1: Esquema de control tolerante a fallos propuesto

pecífico). La magnitud del fallo se puede determinar por medio de umbrales y acciones lógicas, que permiten hacer la conmutación de las ganancias de control en caso de fallo (ver Figura 1).

En la Figura 1 se muestra el esquema de control tolerante a fallos, en donde se pueden apreciar los dos lazos de control de la pila de combustible (A y B), en donde el primer lazo de control (A) está diseñado para mantener controlado el voltaje de salida de la pila de combustible y el segundo está diseñado para mantener controlada la temperatura de la pila de combustible (FC, por sus siglas en inglés) incluso con la presencia de fallos en los sensores. Si ocurriese un fallo en el sensor de presión de la pila, en la ley de control (A) se reconfiguraría el modelo de acuerdo a la magnitud del fallo así como la ganancia del sistema de control. De la misma forma, si ocurriese un fallo en el sensor de temperatura de la pila, en la ley de control (B) se reconfiguraría el modelo de acuerdo a la magnitud del fallo así como la ganancia del sistema de control.

Para desarrollar el sistema de control tolerante a fallos empleando sistemas lineales por tramos es necesario considerar este tipo de sistemas como sistemas conmutados. Una forma general de abordar nuestro problema es considerar nuestro sistema como un sistema híbrido. En algunos procesos su naturaleza puede ser híbrida debido a que coexisten interacciones de dinámicas continuas y discretas o conmutaciones dentro de un proceso (por ejemplo un convertidor, un automóvil).

2.1. SISTEMAS CONMUTADOS

Un sistema conmutado está conformado por una familia de subsistemas y una señal o ley de conmutación que gobierna el cambio al subsistema. La señal o ley de conmutación puede ser conocida, arbitraria, dependiente del tiempo, de los estados, salidas o una combinación de todas [23].

La Figura 2 muestra la representación general de un sistema híbrido donde la dinámica continua puede estar gobernada o controlada por una ley de control y la parte discreta puede estar gobernada mediante una señal, función o ley de conmutación la cual puede ser función de un estado, salida, tiempo, entrada desconocida o una combinación de todas.

El modelo general de un sistema conmutado no lineal puede describirse por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_\theta\big(x(t),u(t),d(t)\big)\\ y(t) &= g_\theta\big(x(t),w(t)\big)\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\theta &= \mu(x,y,w,d,t)\\ \theta &\in I,\ I=\{1,\cdots,m\}\end{aligned} \tag{2}$$

donde *x (t)* es el estado, *u (t)* es la entrada de control, *y (t)* es la salida, *d (t)* y *w (t)* se refiere a las perturbaciones, *θ−μ (x, y, w, d, t)* es la señal de conmutación continua por tramos *(θ (t) = lim$_{\tau\to t^+}$ θ (τ))*que toma valores del conjunto índice *I* = {1,...,m} *(t)* como se aprecia en la Figura 3.

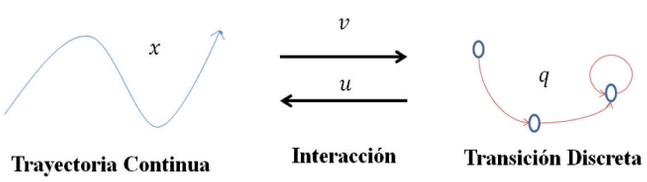


Fig. 2: Sistema híbrido [22]

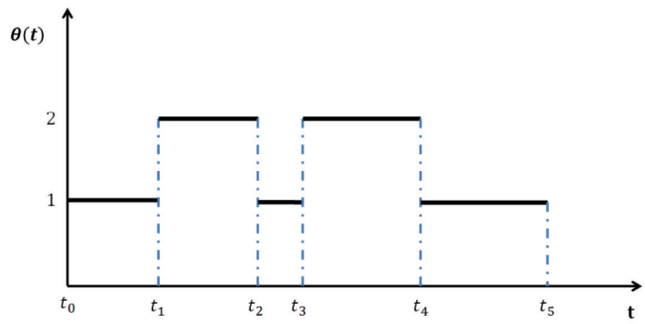


Fig. 3: Señal o ley de conmutación, donde θ(t) es una función dependiente del tiempo que permite la conmutación

La conmutación puede ser *dependiente del estado*, en este caso, se divide el estado en regiones finitas o infinitas, estas regiones se asocian a un sistema dinámico.

La conmutación *dependiente del tiempo*, es mediante una función $f_m, m \in I$ que es una familia de funciones, donde *I* es el conjunto índice de la familia de subsistemas.

Para el caso de estudio de este trabajo se consideran modelos lineales por tramos conmutados por una función que depende del estado. Un sistema PWL con perturbaciones y falla en sensores está descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i(\theta)x + B_i(\theta)u + G_i(\theta)w\\ y &= C_i(\theta)x + D_i(\theta)u + W_i(\theta)d + F_i(\theta)f_s\end{aligned} \tag{3}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, $u \in \mathbb{R}^r$ es el vector de entradas, *d*, $w \in \mathbb{R}^p$ son los vectores de perturbaciones y entradas no controladas del sistema respectivamente y $f_s \in \mathbb{R}^m$ es el vector de falla de sensor. Las matrices (A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, W_i, F_i) son matrices del sistema de dimensiones apropiadas, *(θ (θ∈Ω)* es un parámetro incierto donde Ω es el simplejo.

Para el diseño del sistema de control tolerante a fallos presentado en este trabajo es necesario considerar los sistemas lineales por tramos (PWL) donde las características que deben cumplir estos sistemas se denotan en (4).

$$\begin{aligned}&\cup_i^p X_i = \mathbb{R}^n\\ &Int(X_i) \neq 0,\ \forall\ i = 1,\ldots,p\\ &Int(X_i) \cap Int(X_j) \neq 0,\ \forall,\ i \neq j\end{aligned} \tag{4}$$

Las matrices del sistema $A_i(\theta) \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B_i(\theta) \in \mathbb{R}^{nxq}$, $i \in I$, tienen la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_i = \left\{ A_i(\theta) | A_i(\theta) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j A_{i,j} \right\} \tag{5}$$

$$\mathcal{B}_i = \left\{ B_i(\theta) | B_i(\theta) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j B_{i,j} \right\} \tag{6}$$

Se asume que θ pertenece al simplejo Ω (ver Figura 4) que está dada por:

$$\Omega = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N | \sum_{j=1}^{N} \theta_j = 1, \theta_j \geq 0 \right\} \tag{7}$$

donde $A_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{nxq}$ para todo $i \in I$ y $j = 1,\ldots,N$.

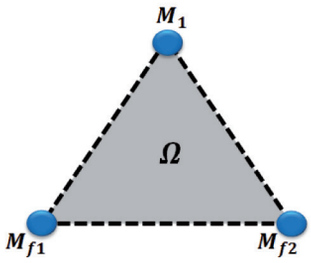


Fig. 4. Simplejo compuesto por un modelo M_i sin falla y los modelos M_{f1}, M_{f2} con diferente tipo de falla.

Para ampliar información ir al vínculo ESTABILIDAD DE SISTEMAS CONMUTADOS:
http://www.revistadyna.com/documentos/pdfs/_adic/7647_1.pdf

2.2. LEY DE CONTROL Y ESTABLECIMIENTO DE LOS FALLOS EN LOS SISTEMAS LINEALES POR TRAMOS

Un fallo es un cambio no deseable del sistema respecto de su valor nominal, estos cambios se ven reflejados en parámetros de las matrices del sistema. Para distinguir entre un sistema nominal sin falla y un sistema con fallo se utiliza el subíndice *i* para el sistema sin fallo y *f* para el caso de fallo. Para sistemas lineales por tramos una manera de hacer el diseño del control es mediante la ley de control $u = K_i y$, que se sustituye en (3) y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i(\theta)x + B_i(\theta)(K_i y) + G_i(\theta)w \\ y &= C_i(\theta)x + D_i(\theta)u + W_i(\theta)d + F_i(\theta)f_s\end{aligned} \tag{8}$$

Si el sistema (16) se ve afectado por fallos en sensores, éste puede ser representado como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i(\theta)x + B_i(\theta)\Big[K_f\left(C_f(\theta) + W_i(\theta)d\right)\Big] + G_i(\theta)w \\ y &= C_f(\theta)x + W_i(\theta)d\end{aligned} \tag{9}$$

donde el sistema se reestructura por completo para garantizar la estabilidad del mismo, con la nueva ley de control $u = K_i y$. Las matrices $(A_i, B_i, C_f = C_i(\theta)x + F_i(\theta)f_s, D_i = 0, G_i, W_i)$ son las nuevas matrices del sistema con falla.

El interés de este trabajo se centra en garantizar estabilidad del sistema incluso con la presencia de fallos en los sensores del sistema que representa la ecuación (17), por lo que se replantea la ley de control para estabilizar el sistema con fallo (18):

$$\dot{x} = A_i(\theta)x + B_i(\theta)\left(K_f y\right) + G_i(\theta)w \tag{10}$$

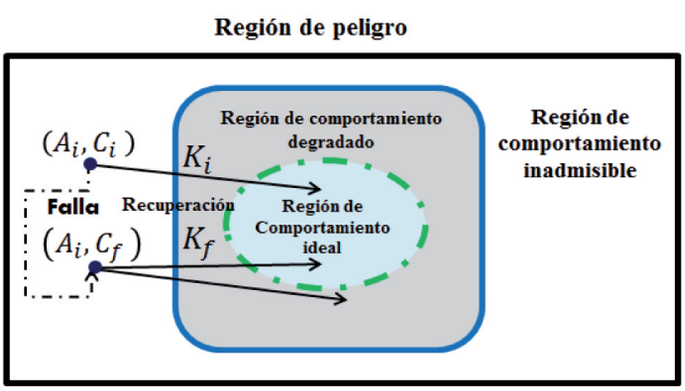


Fig. 5: Reconfiguración de la ley de control admisible

Definición 6: Un fallo se dice admisible si existe una ley de control $u = K_i y$ tal que el sistema en lazo cerrado con fallo esté dado por (18), donde existe un controlador para el conjunto (A_i, C_f) tal que las siguientes desigualdades se satisfagan:

$$\begin{aligned}span\Big(A_i(\theta)x + B_i(\theta)\Big[K_i\left(C_i(\theta)x + W_i(\theta)d\right)\Big] + G_i(\theta)w\Big) \prec 0 \\ span\Big(A_i(\theta)x + B_i(\theta)\Big[K_f\left(C_f(\theta)x + W_i(\theta)d\right)\Big] + G_i(\theta)w\Big) \prec 0\end{aligned} \tag{11}$$

En la Figura 5 se muestra en forma gráfica las diferentes regiones de operación del sistema lineal por tramos, donde para el sistema nominal sin fallo (A_i, C_i) le corresponda la región admisible o ideal. Para el sistema con fallo (A_i, C_f) le puede corresponder la región ideal o la del comportamiento degradado, esto depende del diseño del controlador.

La región sombreada en el interior del óvalo delimitado con líneas punteadas se encuentra la región ideal del comportamiento del sistema y la región sombreada resultante es de comportamiento degradado.

3. MODELO DE LA PILA DE COMBUSTIBLE

En la literatura se reportan algunos trabajos sobre el modelado de la PEM-FC como por ejemplo: modelado estático y dinámico

m_{st}	Masa de la pila	1.4Kg
C_{st}	Capacidad calorífica de la pila	$1300 Jkg^{-1}\circ K^{-1}$
M_{H_2, O_2, H_2O}	Masa molecular de H_2, O_2, H_2O	Kg/mol
Cp_{H_2, O_2, H_2O}	Energía Calorífica de H_2, O_2, H_2O	$JKg^{-1}\circ K$
T_o	Temperatura de referencia	298.15°K
K_T	Constante de proporcionalidad	$340 W^\circ K^{-1}$
D	Coeficiente de transferencia de calor de FC	$0.35 Wm^\circ K^{-1}$
δ	Espesor entre dos celdas de la FC	$5\times10^{-3} m$
H_{amb}	Coeficiente de transferencia de calor de la FC	$3.9 Wm^{-2}\circ K^{-1}$
A_{amb}	Área de intercambio por convección	$0.023 m^2$
ε	Emisividad del cuerpo	0.9
σ	Constante de Stefan Boltzmann	$5.678\times10^{-8} Wm^{-2}\circ K^{-4}$
A_{cool}	Área de transferencia de calor del enfriador	$0.011 m^2$
K_H	Coeficiente de transferencia de calor	$2.16\times10^5 WKg^{-2}\circ K^{-1}$
$m_{cool}\ C_{cool}$	Capacidad térmica del sistema de enfriador	$110 J^\circ K^{-1}$
$\dot{m}_{coolant}$	Flujo másico del enfriador	$0.08 Kg\cdot s^{-1}$
H_f^0	Entalpía especifica de masa de formación	$-2.85\times10^5 J^\circ K^{-1}$

Tabla I: Parámetros utilizados en el modelo Térmico de la FC [2]

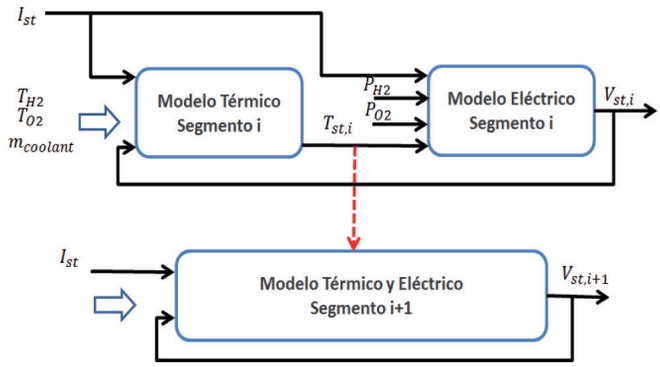


Fig. 6: Diagrama de la pila de combustible: Modelo Térmico y Eléctrico [2]

basado en ecuaciones empíricas. En este trabajo se considera el modelo propuesto en [2]. El modelo de la PEM-FC está representado por dos partes: el modelo térmico y eléctrico, como se observa en la Figura 6.

El hidrógeno, oxígeno y entrada del refrigerante se consideran a temperatura ambiente (25°C).

3.1. MODELO TÉRMICO DE LA PILA DE COMBUSTIBLE

Se considera la PEM-FC como una pila cerrada, como se muestra en la Figura 7, en donde la entrada de flujo del refrigerante y su temperatura se distribuyen de forma uniforme, así como las presiones de hidrógeno y oxígeno. Por el ánodo entra el hidrógeno (combustible) y por el cátodo el oxígeno (oxidante), en el modelo no se considera una purga.

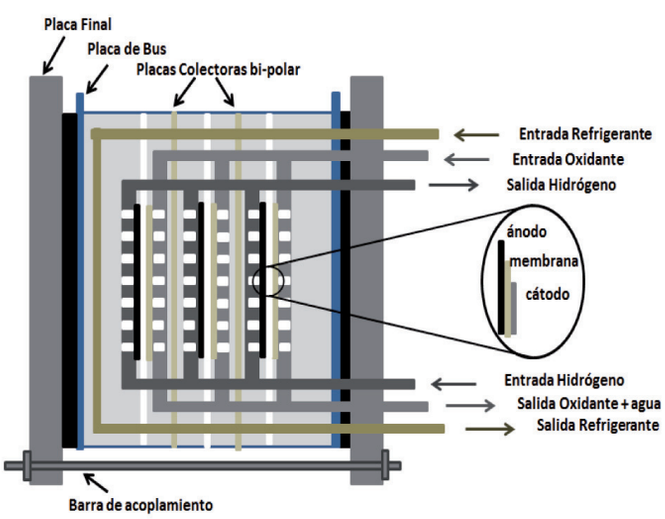


Fig. 7: Esquema de la pila de combustible [1]

Dadas las consideraciones anteriores la temperatura de la pila se obtiene por un balance de energía [2]:

$$m_{st}C_{st}\frac{dT_{st}}{dt} = \dot{H}_{react} - Q_{cool} - Q_{conv} - Q_{rad} + P_{EI} + Q_{cond} \tag{12}$$

como se puede observar, la estructura de la pila de combustible está dada por secciones, donde a cada sección le corresponde un cierto número de celdas.

Energía de reacción electroquímica [1,2]:

$$\dot{H}_{react} = \dot{m}_{H2}\triangle h_{H2} + \dot{m}_{O2}\triangle h_{O2} - \dot{m}_{H2O}\left(h_f^o + \Delta h\right)_{H2O} \tag{13}$$

Los flujos de masa están dados por:

$$\dot{m}_{H2} = M_{H2}N_{cell}\frac{I_{st}}{2F}$$
$$\dot{m}_{O2} = M_{O2}N_{cell}\frac{I_{st}}{4F} \tag{14}$$
$$\dot{m}_{H2O} = M_{H2O}N_{cell}\frac{I_{st}}{2F}$$

La diferencia de entalpía están dados por:

$$\triangle h_{H2} = C_{pH2}\left(T_{H2in} - T_o\right)$$
$$\triangle h_{O2} = C_{pO2}\left(T_{O2in} - T_o\right) \tag{15}$$
$$\triangle h_{H2O} = C_{pH2O}\left(T_{airout} - T_o\right)$$

La temperatura de salida del oxígeno es:

$$T_{airout} = 2T_{air}^{stack} - T_{airin}$$
$$\text{donde } T_{air}^{stack} \text{ es } T_{air}^{stack} = T_{st} - \frac{\dot{H}_{react} - P_{EI}}{K_T} \tag{16}$$

La energía por convección es:

$$Q_{conv} = h_{amb}A_{amb}\left(T_{st} - T_{amb}\right) \tag{17}$$

La energía por radiación:

$$Q_{rad} = \varepsilon\sigma A_{amb}\left(T_{st}^4 - T_{amb}^4\right) \tag{18}$$

Potencia eléctrica:

$$P_{EI} = \left(E_{ocv} - V_{st}\right)I_{st} \tag{19}$$

Energía del enfriador:

$$Q_{cool} = h_{cool}A_{cool}\left(T_{st} - T_{cool}\right) \tag{20}$$

donde h_{cool} es $h_{cool} = K_h\dot{m}_{coolant}$.

La energía por conducción:

$$Q_{cond} = \begin{cases} \frac{D}{\delta}\left(T_2 - T_{st}^1\right) \text{ para la 1er celda} \\ \frac{D}{\delta}\left(T_{j+1} + T_{j-1} - 2T_{st}^{2,3,..j-1}\right) \text{ intermedias} \\ \frac{D}{\delta}\left(T_{j-1} - T_{st}^j\right) \text{ para la última celda} \end{cases} \tag{21}$$

La temperatura del enfriador dentro de la PEM-FC es calculada como sigue por medio de los balances de energías presentes en el proceso que son:

$$m_{cool}C_{cool}\frac{dT_{cool}}{dt} = \Delta\dot{H}_{cool} + Q_{cool} \tag{22}$$

Diferencia de Entalpía del flujo del refrigerante:

$$\triangle\dot{H}_{cool} = \dot{m}_{coolant}C_{pH2O}\left(T_{cool-in} - T_{cool}\right) \tag{23}$$

3.1.1. Coeficiente de actividad de vapor de agua en la membrana

El contenido de agua en la membrana de la pila, se determina por medio del coeficiente de actividad de vapor de agua. El coefi-

ciente de actividad en la fase de vapor es $a = x_w P_v / P_{sat}$ [24, 25, 28]. La presión de saturación está dada por la siguiente ecuación P_{sat}:

$$log_{10}P_{sat} = -2.1794 + 0.02953T_{st} - 9.1837*10^{-5}T_{st}^2 + 1.4454*10^{-7}T_{st}^3 \quad (24)$$

donde P_v es la presión de vapor, x_w es la fracción molar del vapor y T_{st} es la temperatura de la pila.

Dado el coeficiente de actividad de vapor de agua a, el contenido de agua de la celda λ_i es:

$$\lambda_i = \begin{cases} 0.043 + 17.81a - 39.85a^2 + 36a^3, & 0 \prec a \le 1 \\ 14 + 1.4(a-1), & 1 \prec a \le 3 \end{cases} \quad (25)$$

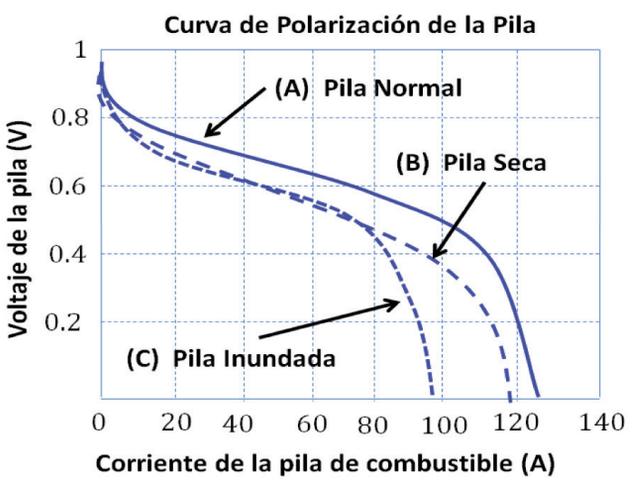


Fig. 8: Diferencias en la curva de polarización [2]

El contenido de agua λ_i en la membrana de la pila varia de 0 a 14 que corresponde de 0% al 100% de humedad, donde el índice *i* indica que es el ánodo o cátodo ($i \in \{an, ca\}$). Se evalúa la sensibilidad del voltaje de la PEM-FC, por medio de la temperatura de la pila, la humedad, las presiones del oxígeno e hidrógeno. Se realiza el análisis de la pila a través de la curva de polarización y con los parámetros de la Tabla I para saber si está en operación normal, inundada o seca (ver Figura 8).

3.2. MODELO ELÉCTRICO DE LA PILA DE COMBUSTIBLE

El modelo eléctrico de la PEM-FC, se obtiene por medio de las ecuaciones de voltajes de Nernst, de activación, óhmico y de concentración. La pérdida de Voltaje por Activación, es causada por la lentitud de las reacciones que tienen lugar en la superficie del electrodo. Una proporción del voltaje generado se pierde en la conducción de la reacción química que transfiere los electrones hacia o desde el electrodo, está ecuación se obtiene por medio la ecuación de Tafel [1]. La caída Voltaje Óhmica, se debe a la resistencia del flujo de electrones a través del material de los electrodos y a diversas interconexiones, también a la resistencia al flujo de iones a través del electrólito. El principal parámetro de esta caída de voltaje es la resistencia de la membrana R_{mem} [24,25]. La caída de Voltaje de Concentración [2,26,27] se debe al cambio en la concentración de los reactivos en la superficie del electrodo por ejemplo el combustible, porque la reducción en la concentración es resultado de una falla para transportar suficiente reactivo a la superficie del electrodo.

El voltaje total a través de la FC esta descrito por medio de las caídas de voltajes de activación, óhmico y de concentración de una pila como se muestra en la siguiente ecuación [1,2]:

$$V_{cell} = E - \eta_{act} - \eta_{ohm} - \eta_{conc} \quad (26)$$

donde E es la fuerza electromotriz dada por la ecuación de Nernst:

$$E = 1.229 - 8.5\times10^{-4}(T_{st} - 298.15) + 4.3085\times10^{-5}(T_{st})\left[ln(P_{H2}) + 0.5ln(P_{O2})\right] \quad (27)$$

Las pérdidas de voltajes por activación, óhmico [24,25] y de concentración [2,26,27] de la pila son las siguientes:

Voltaje de activación:

$$\eta_{act} = A_{at} \cdot ln\left((J + J_n)/J_o\right)$$

donde A_{at} es $A_{at} = (RT_{st})/(2\alpha F)$.

Voltaje óhmico:

$$\eta_{ohm} = R_{mem}J$$

donde R_{mem} es:

$$R_{mem} = \frac{t_m}{(b_{11}\lambda_m - b_{12})exp\left[b_2\left(\frac{1}{303} - \frac{1}{T_{st}}\right)\right]}$$

Voltaje de concentración

$$\eta_{conc} = m \cdot exp(nJ)$$

α	Coeficiente de transferencia de carga	0.44
m	Coeficiente de concentración [27]	$2.11\times10^{-5}V$
n	Coeficiente de concentración [27]	$8\times10^{-3}cm^2mA^{-1}$
S_{cell}	Superficie de la pila	$100cm^2$
R_{mem}	Resistencia de la membrana	$300\times10^{-6}k\Omega cm^2$
J_n	Densidad de corriente de fuga	$3\times10^{-3}A/cm^2$
J_0	Densidad de corriente de intercambio	$4\times10^{-7}A/cm^2$
C_{dl}	Capacidad de doble capa	$50mF/cm^2$
F	Constante de Faraday	$9.65\times10^4C/mol$
R	Constante de los gases ideales	$8.314472J/mol/°K$
T_{fc}	Temperatura de la pila de combustible	$333.15°K$
P_{H_2}	Presión parcial del hidrógeno	0.93 (bar)
P_{O_2}	Presión parcial de oxígeno	0.17 (bar)

Tabla II: Parámetros utilizados en el modelo eléctrico para el análisis de la FC [2]

El voltaje en circuito abierto E_{ocv} se calcula de la siguiente manera:

$$E_{ocv} = 1.229 - 8.5\times10^{-4}\left(T_{st} - 298.15\right) + 4.3085\times10^{-5}\left(T_{st}\right)\left[ln\left(P_{H2}\right) + 0.5ln\left(P_{O2}\right)\right] + Aln\left(J_0\right) \quad (28)$$

Se evalúan los parámetros en el modelo de la pila, para analizar el efecto que tiene el coeficiente de actividad del vapor de agua a y el contenido de agua en la membrana λ_j, en el voltaje obtenido de la pila V_{cell} y en la temperatura de la pila de combustible (ver Tabla II). Se realiza un análisis de sensibilidad en las ecuaciones de actividad del agua y del contenido de agua. Se realiza las simulaciones variando parámetros como la temperatura de la pila y la demanda de corriente.

3.3. MODELO DE COMPRESOR DE LA PILA DE COMBUSTIBLE PARA DETERMINAR LA PRESIÓN DE AIRE

El modelo de rotación se usa para representar la dinámica del compresor el modelo es presentado en [24]:

$$J_{cp}\frac{dw_{cp}}{dt} = \tau_{cm} - \tau_{cp} \quad (29)$$

donde τ_{cm} (V_{cm}, W_{cp}) es torque del motor del compresor y τ_{cp} es el torque de carga. El par del motor del compresor se calcula usando la ecuación estática del motor:

$$\tau_{cm} = \eta_{cm}\frac{k_t}{R_{cm}}\left(v_{cm} - k_v w_{cp}\right) \quad (30)$$

donde K_t, R_{cm} y K_v son constantes del motor, η_{cm} es la eficiencia mecánica del motor y V_{cm} es el voltaje suministrado al motor del compresor. El torque requerido para manejar el compresor es calculado usando la ecuación termodinámica:

$$\tau_{cp} = \frac{C_p}{w_{cp}}\frac{T_{atm}}{\eta_{cp}}\left[\left(\frac{p_{sm}}{p_{atm}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]W_{cp} \quad (31)$$

donde γ es la razón de calor específico del aire (=1.4), C_p es capacidad de calor específico a presión constante del aire (= 1004$J \bullet Kg^{-1} \bullet {}^{o}K^{-1}$), η_{cp}, es la eficiencia del compresor, P_{sm} es la presión dentro del colector de suministro y P_{atm}, T_{atm} son la presión y temperatura atmosférica, respectivamente.

Las ecuaciones termodinámicas son utilizadas para calcular la temperatura del aire de salida:

$$T_{cp} = T_{atm} + \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}}\left[\left(\frac{p_{sm}}{p_{atm}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

Modelo del colector de suministro

El colector de suministro de cátodo (SM) incluye volúmenes de tubería y el colector de pila entre el compresor y la pila de combustible. La presión en el suministro del colector P_{sm}, se rige por las ecuaciones de conservación de continuidad de masa y de la energía [24]:

$$\frac{dm_{sm}}{dt} = W_{cp} - W_{sm,out} \quad (32)$$

$$\frac{dp_{sm}}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V_{sm}}\left(W_{cp}T_{cp} - W_{sm,out}T_{sm}\right) \quad (33)$$

donde R_a es la contante del aire, V_{sm} es el volumen del colector de suministro y T_{sm} es la temperatura del flujo de entrada del colector calculado por la ley de los gases ideales. El flujo de salida del colector de suministro $W_{sm,out}$ es calculada como función de P_{sm} y P_{ca}.

$$W_{sm,out} = k_{sm,out}\left(p_{sm} - p_{ca}\right) \quad (34)$$

Modelo del colector de retorno

A diferencia del colector de suministro, donde se deben considerar los cambios de temperatura, la temperatura en el colector de retorno T_m, se asume constante e igual a la temperatura del flujo que sale del cátodo. La presión de colector de retorno P_{rm}, se rige por la ley de conservación de la masa y del gas ideal a través de suposiciones isotérmicas [24]:

$$\frac{dp_{rm}}{dt} = \frac{R_a T_{rm}}{V_{rm}}\left(W_{ca,out} - W_{rm,out}\right) \quad (35)$$

donde $W_{rm,out}$

$$W_{rm,out} = \frac{C_{D,rm}A_{T,rm}p_{rm}}{\sqrt{RT_{rm}}}\left(\frac{p_{atm}}{p_{rm}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_{atm}}{p_{rm}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad para \quad \frac{p_{atm}}{p_{rm}} > \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (36)$$

La presión parcial del oxígeno en el cátodo es calculada por:

$$p_{O_2,ca} = \frac{m_{O_2,ca}R_{O_2}T_{st}}{V_{ca}} \quad (37)$$

La ecuación de estado del flujo de masa de oxígeno:

$$\frac{dm_{O_2,ca}}{dt} = W_{O_2,ca,in} - W_{O_2,ca,out} - W_{O_2,reacted} \quad (38)$$

Las tasas de los flujos de masa del oxígeno en el cátodo se calculan con las siguientes ecuaciones [24]:

$$W_{O_2,ca,in} = x_{O_2,ca,in}W_{a,ca,in} \quad (39)$$

$$W_{O_2,ca,out} = x_{O_2,ca}W_{a,ca,out} \quad (40)$$

$$W_{O_2,reacted} = M_{O_2}\frac{nI_{st}}{4F} \quad (41)$$

3.4. OBTENCIÓN DE MODELOS LINEALES DE LA PILA DE COMBUSTIBLE

La obtención de los modelos lineales a partir del modelo no lineal de la pila de combustible se realiza a través de las series de Taylor (método Jacobiano), sustituyendo los parámetros del modelo y los datos del punto de operación (ver al final del apartado el vínculo a la Tabla IA de condiciones de linealización). El modelo del compresor para el suministro de presión parcial de oxígeno P_{o_2}, propuesto por Pukrushpan et al. (2002) [24] y el modelo de temperatura y voltaje de la pila de combustible del trabajo de Emmanuel Frappe et al. (2011) [2].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,w) \\ z &= g(x,u,w) \\ y &= h(x,u,w) \end{aligned} \tag{42}$$

donde *x* representa los estados de la pila, *u* es la entrada, *w* son las perturbaciones y *x, y* son las salidas. El vector de estados está dado por la siguiente expresión:

$$x = \begin{bmatrix} w_{cp} & T_{mp} & p_{sm,in} & m_{N_2} & m_{O_2} & p_{rm} & T_{st} & T_{cool} \end{bmatrix} \tag{43}$$

La representación de la pila de combustible por medio de los sistemas lineales por tramos (ver Figura 9) en espacio de estados con perturbación es de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{44}$$

donde las matrices $(A_i, B_i, C_i, D_i, G_i)$ son matrices del sistema de dimensiones apropiadas, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados (temperaturas), $u \in \mathbb{R}^r$ es la entrada de control (flujo molar del refrigerante $\dot{m}_{coolant}$), y w es el vector de perturbaciones o entradas no controladas (la demanda corriente I_{st}).

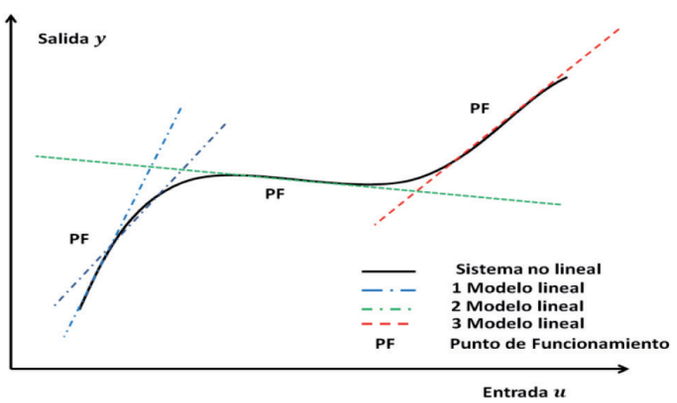


Fig. 9: Representación de un sistema mult ilineal sobre una dinámica no lineal

Para ampliar información ir al vínculo PUNTOS DE OPERACIÓN PARA LINEALIZACION DEL SISTEMA:
http://www.revistadyna.com/documentos/pdfs/_adic/7647_2.pdf

4. DISEÑO DEL CONTROL TOLERANTE A FALLOS EN SENSORES DE LA PILA DE COMBUSTIBLE

Se considera que para el diseño del control tolerante a fallos en los sensores de la pila de combustible se deben satisfacer las restricciones y las condiciones de la teoría de Lyapunov, para garantizar la estabilidad del sistema, utilizando el siguiente Teorema 7.

Teorema 7: Existe una función de Lyapunov $V(\theta, x) = x^T P x \succ 0$ y su derivada es definida negativa $\dot{V}(\theta, x) \prec 0$, sea $P(\theta) = P^T(\theta) \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que para $\forall \theta \in \Omega$ y $x \neq 0$ para el sistema (3) con una ley de control por retroalimentación de estados $u = K_i y$. En otras palabras existe una LMI tal que:

$$\begin{aligned} &A_i(\theta)^T P_i(\theta) + P_i(\theta) A_i(\theta) - \left(B_i(\theta) U_i(\theta) C_i(\theta)\right)^T - \\ &B_i(\theta) U_i(\theta) C_i(\theta) + G_i^T(\theta) P_i(\theta) + P_i(\theta) G_i(\theta) \prec 0 \end{aligned} \tag{45}$$

donde $(P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \ldots + \theta_k P_k$, $A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \ldots + \theta_k A_k$. Tomando el resultado del Teorema 6 se puede simplificar el LMI (37), ahora se tiene:

$$\begin{aligned} &A_i^T P_i + P_i A_i - \left(B_i U_i C_i\right)^T - B_i U_i C_i + \\ &G_i^T P_i + P G_i \prec 0 \end{aligned} \tag{46}$$

donde $U_i = K_i P_i$, despejando se obtiene la ganancia de control $K_i = U_i P^{-1}{}_i$.

Entonces la función de Lyapunov dependiente de parámetros $V(\theta, x)$ asegura la estabilidad robusta del sistema (3). Para el caso con falla en los sensores, las LMI´s (53) y (54) serán las siguientes:

$$\begin{aligned} &A_f(\theta)^T P_i(\theta) + P_i(\theta) A_f(\theta) - \left(B_i(\theta) U_f(\theta) C_f(\theta)\right)^T - \\ &B_i(\theta) U_f(\theta) C_f(\theta) + G_i^T(\theta) P_i(\theta) + P_i(\theta) G_i(\theta) \prec 0 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &A_f{}^T P_i + P_i A_f - \left(B_i U_f C_f\right)^T - B_i U_f C_f + \\ &G_i^T P_i + P G_i \prec 0 \end{aligned} \tag{48}$$

donde las nuevas ganancias de control se obtendrán a partir $U_f = K_f P_i$, despejando se obtiene la ganancia de control $K_f = U_f P^{-1}{}_i$.

Para ampliar información ir al vínculo MODELOS LINEALES Y GANANCIAS DE LAS MATRICES CON Y SIN FALLA:
http://www.revistadyna.com/documentos/pdfs/_adic/7647_3.pdf

5. RESULTADOS Y SIMULACIONES

En la Figura 10 se muestra la simulación del modelo no lineal de la pila de combustible

En la Figura 10 se presenta la regulación de la temperatura en diferentes puntos de operación sin ocurrencia de falla, el umbral de temperatura bajo el que se desarrolló esta simulación es de 25°C a 50°C, como se puede apreciar la temperatura fue controlada satisfactoriamente. Este modelo no lineal nos permitirá realizar pruebas de comparación contra el modelo PWL, la comparación consistirá en emplear el modelo no lineal como si fuera el sistema real al cual se le inducirá a fallos en los sensores.

En la parte media de la Figura 11. Se observa la ocurrencia de un fallo en el sensor de presión de la celda de combustible aproximadamente en el segundo 15 el fallo fue del 10% de su condición nominal, este fallo en el sensor en de presión tiene un efecto negativo en la producción de voltaje generado por la celda

de combustible, como se puede apreciar en la parte superior de la Figura 11 (línea anaranjada) baja la producción. Sin embargo, nuestro sistema de control, cuando ocurre el fallo en el sensor de presión el sistema conmuta al modelo PWL diseñado para este tipo de fallos y como se muestra en la parte superior de la Figura 11 (la línea continua gris), el sistema permanece produciendo la misma cantidad de voltaje incluso cuando el sensor ha fallado, se observa que en el tiempo 50s el sensor se reestablece. En el tiempo 310s aproximadamente se vuelve a observar una falla similar en el sensor de presión, así mismo se observa en la parte superior de la Figura 11 como el modelo PWL (línea gris continua) hace frente al fallo, y la producción de voltaje no se ve afectada. En la parte inferior de la Figura 11 se observa la presencia de un fallo aproximadamente en el tiempo 25s y 340s, el fallo fue del 10% de magnitud en el sensor de temperatura, este fallo fue reconfigurado por el modelo PWL y se puede observar que la temperatura se mantiene estable (línea continua azul).

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó el diseño de un sistema de control tolerante a fallos en los sensores de temperatura y de presión de la PEM-FC, empleando un control por retroalimentación de estados. Para desarrollar este sistema fue necesario realizar una representación del sistema mediante modelos lineales a tramos. El cambio de ganancia del control se realiza de acuerdo a umbrales propuestos por el diseñador que permite detectar los cambios en las variables importantes como la temperatura o la presión. En el caso del control del voltaje de la pila de combustible el fallo debe de incluirse en las ecuaciones de voltaje de la pila para ser atenuada, de no ser así no puede ser atenuado o rechazado el fallo. Los resultados presentados muestran que el sistema FTC pasivo diseñado para sensores permite la continua operación del sistema incluso con la presencia de fallos. La ley de control garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado con retroalimentación de los estados. El sistema de control permite regular temperatura y voltaje deseado, además se obtiene una mejora en la humedad de la membrana evitando secar o inundar de la pila. El mantener la humedad adecuada de la membrana ayuda a mejorar el desempeño y a prolongar la vida útil de la pila de combustible y sus componentes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Barbir F, PEM Fuel Cells: Theory and Practice, A. Press, Ed. Elsevier, 2005, p.154.
[2] Frappé E, De Bernardinis A, Bethoux O, et al., "PEM fuel cell fault detection and identification using differential method: simulation and experimental validation". The European Physical Journal Applied Physics, vol.54, p.1-11, 2011 (DOI: http://dx.doi.org/10.1051/epjap/2011100277).
[3] Puig V, Quevedo J, Escobet T, et al., "Control tolerante a fallos (parte 1): Fundamentos y diagnóstico de fallos". CEA-IFAC, p.15-31, 2004.
[4] Blanke M, Kinnaert M, Lunze J, et al., Diagnosis and fault-tolerant control (1st ed.), Springer, 2003.
[5] Patton RJ, "Fault-tolerant control systems: The 1997 situation". IFAC Safeprocess, p.1033-1054, 1997.
[6] Richter JH, Heemels WPMH, van de Wouw N, et al., "Reconfigurable control of PWA systems with actuator and sensor faults: stability". CDC, p.1060-1065, 2008 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2008.4738873).
[7] Nayebpanah N, Rodrigues L, and Zhang Y, "Fault-tolerant controller synthesis for piecewise affine systems". American Control Conference, p.222-226, 2009 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2009.5160605).
[8] Yang H, Jiang B, and Cocquempot V, "A fault tolerant control framework for periodic switched nonlinear systems". International Journal of Control, p.117-129, 2009 (DOI: http://dx.doi.org/10.1080/00207170801993579).
[9] Chesi G, Garulli A, Tesi A, et al., "Robust stability of polytopic systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions". In Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2003.1272307).
[10] "Homogeneous Lyapunov functions for systems with structured uncertainties". Automatica, vol.39, p.1027-1035, 2003 (DOI: http://dx.doi.

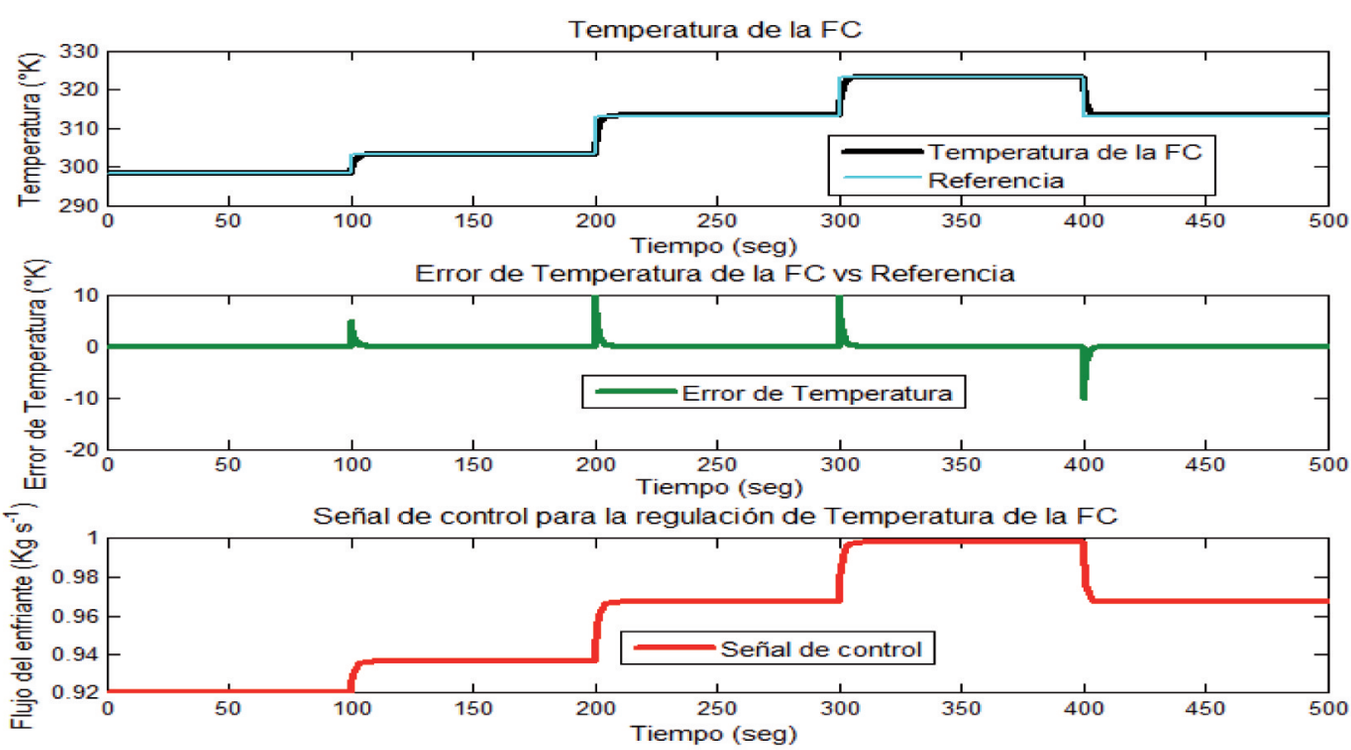


Fig. 10: Modelo no lineal de la pila de combustible

org/10.1016/S0005-1098(03)00039-6).

2011 (DOI http://dx.doi.org/10.1007/s11071-010-9795-2).

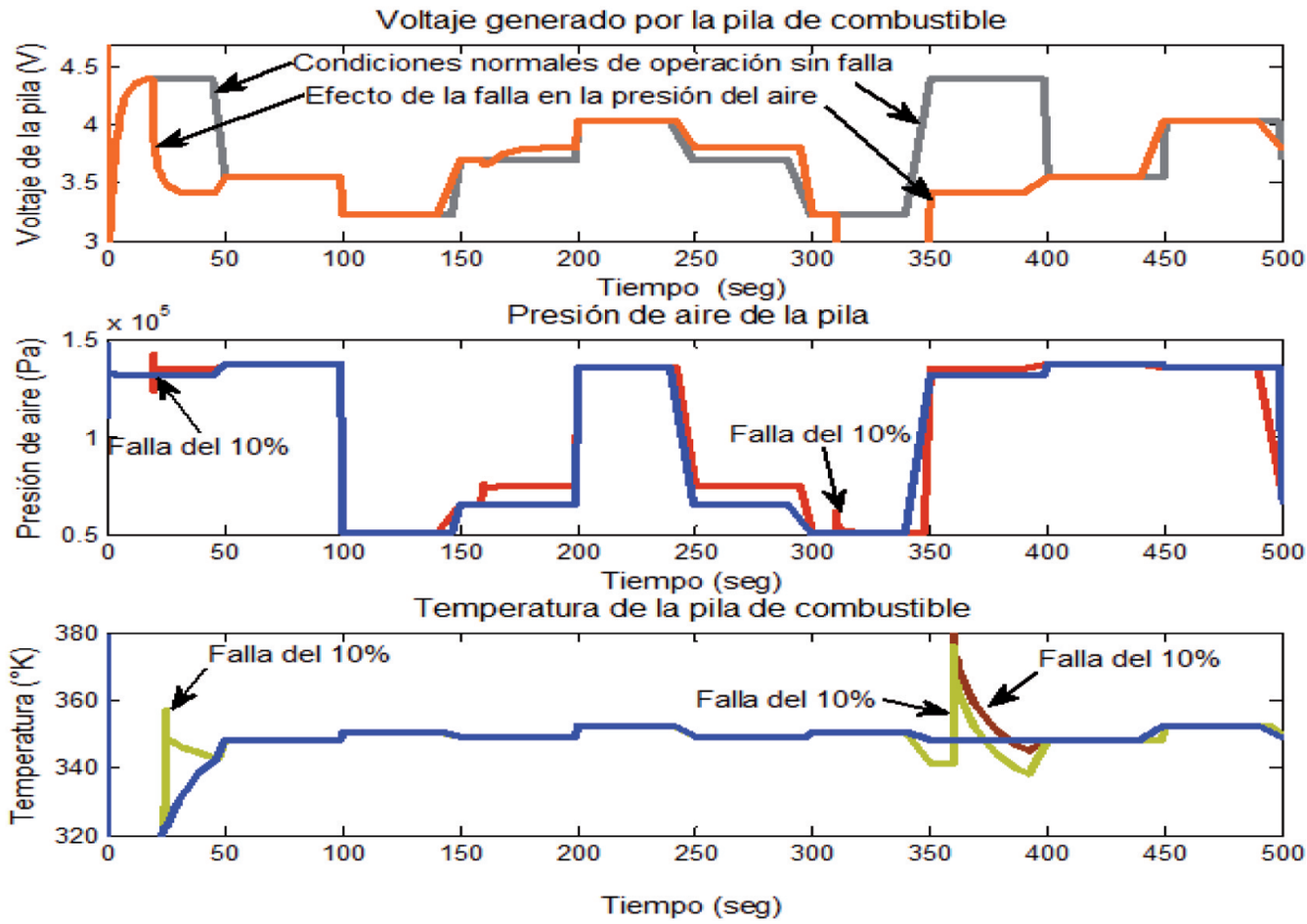


Fig. 11: Modelo PWL de la pila de combustible en presencia de fallos

[11] Oliveira RC, and Peres PLD, "LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions". Systems and Control Letters, vol.55, p.52-61, 2006 (DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.sysconle.2005.05.003).
[12] de Best JJ, Bukkems BH, van de Molengraft MJ, et al., "Robust control of piecewise linear systems: A case study in sheet flow control". Control Engineering Practice, Elsevier, vol.16, p.991-1003, 2008 (DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2007.10.004).
[13] Johansson M, and Rantzer A, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems". IEEE Trans. Autom. Control, vol.43, p.555-559, 1998 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/9.664157).
[14] Xu J, and Xie L, "Homogeneous polynomial Lyapunov functions for piecewise affine systems". American Control Conference, p.581-586, 2005 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2005.1470019).
[15] Khargonekar PP, Petersen IR, and Zhou K, "Robust stabilization of uncertain linear system: Quadratic stabilizability and control theory". IEEE Trans. Automat. Contr., vol.35, p.356-361, 1990 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/9.50357).
[16] Barmish BR, Petersen IR, and Feuer A, "Linear ultimate boundedness control of uncertain dynamical systems". Automatica, vol.19, p.523-532, 1983 (DOI: http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(83)90007-9).
[17] Branicky MS, "Stability of switched and hybrid systems". IEEE CDC, p.3498-3503, 1994 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/CDC.1994.411688).
[18] Liberzon D, and Morse AS, "Basic problem in stability and design of switched systems". IEEE Control Systems, vol.19, p.59-70, 1999 (DOI: 10.1109/37.793443).
[19] Daafouz J, Riedinger P, and Lung C, "Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, p. 1883-1887, 2002 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2002.804474).
[20] BenAbdallah A, Hammami MA, and Kallel J, "Robust stability of uncertain piecewise-linear systems: LMI approach". Nonlinear Dyn, vol.63, p.183-192, 2011 (DOI http://dx.doi.org/10.1007/s11071-010-9795-2).
[21] Gahinet P, and Chilali M, "Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty". IEEE Transactions on Automatic Control, vol.41, p.436-442, 1996 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/9.486646).
[22] Liberzon D, Switching in Systems and control, Birkhäuser, Ed. Birkhäuser, 2003.
[23] Sun Z, and Ge SS, Switched Linear Systems Control and Design, Springer-Verlag, Ed. Springer, 2005.
[24] Pukrushpan JT, Stefanopoulou AG, and Huei P, "Modeling and control for PEM fuel cell stack system". Proceedings of the American Control Conference, p.3117-3122, 2002 (DOI: http://dx.doi.org/10.1109/ACC.2002.1025268).
[25] Springer TE, Zawodzinski TA, and Gottesfeld S, "Polymer electrolyte fuel cell model". J. Electrochem. Soc., vol. 138, p. 2334_2342, 1991 (DOI: http://dx.doi.org/10.1149/1.2085971).
[26] Kim J, Lee S-M, Srinivasan S, and Chamberlin CE, "Modeling of proton exchange membrane fuel cell performance with an empirical equation". J. Electrochem. Soc., vol.142, p.2670-2674, 1995 (DOI: http://dx.doi.org/10.1149/1.2050072).
[27] Larminie J, and Dicks A, Fuel Cell Systems Explained, John Wiley & Sons Ltd , Ed. Wiley, 2003, p 60.
[28] Nguyen TV, and White RE, "A water and heat management model for proton-exchange-membrane fuel cells". Journal of the Electrochemical Society, vol.140, p.2178-2186, 1993 (doi: http://dx.doi.org/10.1149/1.2220792).

AGRADECIMIENTOS

Julio César Rodríguez Cerda agradece al CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), al TNM (Tecnológico Nacional de México) y al CENIDET por la beca doctoral asignada y la ayuda otorgada para terminar esta investigación.