

GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES

José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán y Ángel-Jesús Callejón-Ferre
 Universidad de Almería. Dpto. de Ingeniería (España)

DOI: <https://doi.org/10.52152/D11302>

ABSTRACT:

This paper presents a method for studying the static response in suspended cables. A novel discretization technique based on Archimedes' methods is applied, which results in a graphic resolution of the problem based on a system of articulated bars, and which defines a finite cable element.

Parabolic approximation of the cable is studied. The proposed model allows manual calculation. It can solve the problem via three iterations whose equations are drawn from intuitive graphics and with errors less than 2% from the first iteration. Therefore, it represents an important didactic innovation both for professional training and the first engineering courses in the electrical branch.

Key Words: element of length; Archimedes; transcendental equation; parabolic profile; finite elements; graphical statics; electrical vocational training

INTRODUCTION

El diseño de cables suspendidos para líneas aéreas de transporte de energía eléctrica, requiere conocer su respuesta estática ante diferentes condiciones climáticas como: hielo, viento y variaciones de temperatura [1-3]. Se parte de los esfuerzos máximos que soporta el cable los cuales se producen en condiciones con temperaturas frías y sobrecargas de viento o hielo. Then the maximum curvature of the cable is calculated, which occurs in different conditions with high temperatures and without atmospheric inclemencies. Tanto el perfil como la longitud del perfil del cable, responden a funciones hiperbólicas. El perfil se aproxima mediante una parábola para curvaturas pequeñas [4,5]. La longitud del arco de la parábola anterior es fundamental para resolver el cambio de estado estático del cable (ecuación de cambio de condiciones). El presente trabajo propone un método gráfico mediante un sistema de barras articuladas, con masas puntuales situadas en articulaciones alternas.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. MODELO DEL CABLE

El método se aplica para obtener el equilibrio estático de un cable suspendido en un vano l , cuyo vértice o punto más bajo es A y fijado en dos apoyos B situados a la misma altura. En éstos se aplican las fuerzas exteriores o reacciones R_B , con componentes horizontal y vertical H y V respectivamente según la figura 1. El origen de coordenadas se toma en el punto más bajo del perfil o vértice, punto A , siendo las coordenadas z - x , vertical y horizontal respectivamente.

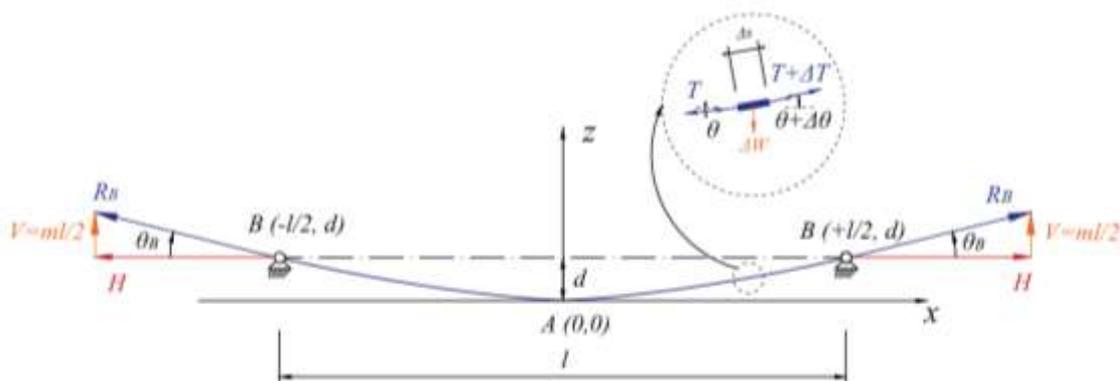


Figure 1: Perfil del cable y estática de un elemento diferencial de longitud.

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

Figure 1 also shows the equilibrium of an element of length, Δs , between two straight sections with angles θ and $\theta + \Delta\theta$ with respect to the horizontal. Sobre este elemento actúan dos fuerzas: variación de tensión en el cable ΔT , siendo T la tensión del cable perpendicular a la sección recta del mismo, y el peso del elemento ΔW , siendo W el peso del cable. Las ecuaciones de equilibrio estático para un elemento diferencial quedan [4]:

$$\overline{\Delta T} + \overline{\Delta W} = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds}; T \frac{dz}{ds} \right) \Delta s + \frac{d}{ds} (0; -ms) \Delta s = 0 \quad (1)$$

Donde m es el peso por unidad de longitud del cable.

2.2. PERFIL, PENDIENTE Y LONGITUD.

Integrando, se obtiene el perfil hiperbólico según las condiciones de la figura 1 y con el parámetro ρ constante.

$$\int_0^x dz = \int_0^x \sinh\left(\frac{x}{\rho}\right) dx \rightarrow z(x) = \rho \cosh\left(\frac{x}{\rho}\right) - \rho, \quad z(0) = 0, \quad \rho = \frac{H}{m} \quad (2)$$

Para la pendiente,

$$z'(x) = \sinh\left(\frac{x}{\rho}\right) \quad (3)$$

Y para la longitud:

$$\int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \rightarrow s(x) = \rho \sinh\left(\frac{x}{\rho}\right) \quad (4)$$

El parámetro ρ se nombra como radio de curvatura, ya que según ecuación (4) relaciona la pendiente de la curva con su longitud.

Estas funciones hiperbólicas se aproximan mediante series de Taylor truncadas al tercer término que resultan válidas para cables con poca curvatura ($d/l < 1/8$) [5]. La aproximación para el perfil del cable:

$$z(x) \approx \frac{x^2}{2\rho} \quad (5)$$

Para la pendiente del perfil:

$$z'(x) \approx \frac{x}{\rho} \quad (6)$$

Y para la longitud:

$$s(x) \approx x + \frac{x^3}{6\rho^2} \quad (7)$$

3. CÁLCULOS

Se busca una justificación gráfica para la longitud del cable según la ecuación (7). Los autores de este trabajo han definido al sumando cúbico de ecuación (7), como el desplazamiento horizontal del extremo del cable durante su izado, partiendo desde el desarrollo horizontal en tensión del cable. Éste se obtiene al aplicar separadamente las fuerzas exteriores H y V [6]. De esta manera la longitud del cable se puede escribir según ecuación (8).

$$s(x) \approx x + u(x) \rightarrow u(x) = \frac{x^3}{6\rho^2} \quad (8)$$

Sustituyendo ecuaciones (5) y (6) en (8) se puede obtener:

$$u(x) = \frac{z(x)z'(x)}{3} \quad (9)$$

Admitiendo la hipótesis de ángulos pequeños según ecuación (10).

$$\tan \theta(x) \approx \theta(x) \quad (10)$$

Se cumple ya que se admite que: $d/l < 1/8$. Se puede reescribir ecuación (9) en:

$$u(x) = \frac{z(x)\theta(x)}{3} \quad (11)$$

3.1. MODELO DE BARRAS ARTICULADAS. LONGITUD.

As a starting point, we analyse the geometric relationships for the triangle in figure 2 and calculate the length of the side s according to equation (12).

$$s = x + u \quad (12)$$

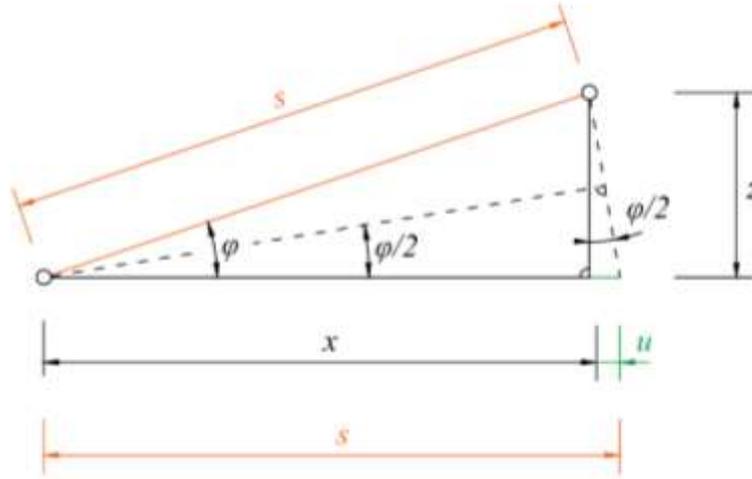


Figura 2: Elemento de longitud resuelto mediante triángulos.

Se admite la hipótesis de ángulos pequeños según la ecuación (10) también para el ángulo φ de la figura 2. Y queda:

$$z = x\varphi, \quad u = z \frac{\varphi}{2} \quad (13)$$

El desplazamiento horizontal u obtenido resolviendo triángulos según la ecuación (13), se iguala al desplazamiento horizontal según ecuación (11). Y seguidamente se despeja el ángulo φ that resolves the alignment.

$$\frac{\varphi z}{2} = \frac{z\theta}{3} \rightarrow \varphi = \frac{2\theta}{3} \quad (14)$$

Se dibuja una barra (línea) el ángulo anterior desde el punto fijo B, φ_B . Corta al eje horizontal en tres cuartos del semi-vano correspondiente $\frac{3}{4}x_B$. This represents a system of bars that verifies the geometry of the cable's semi-vane: x_B , z_B , y lleva implícita la longitud del mismo a través del desplazamiento u_B según ecuación (15) y figura 3. El subíndice B se refiere a las magnitudes referentes al apoyo fijo del cable, punto B .

$$\varphi_B = \frac{2\theta_B}{3}, \quad z_B = \frac{3x_B}{4} \varphi_B, \quad u_B = z_B \frac{\varphi_B}{2}, \quad s_B = x_B + u_B \quad (15)$$

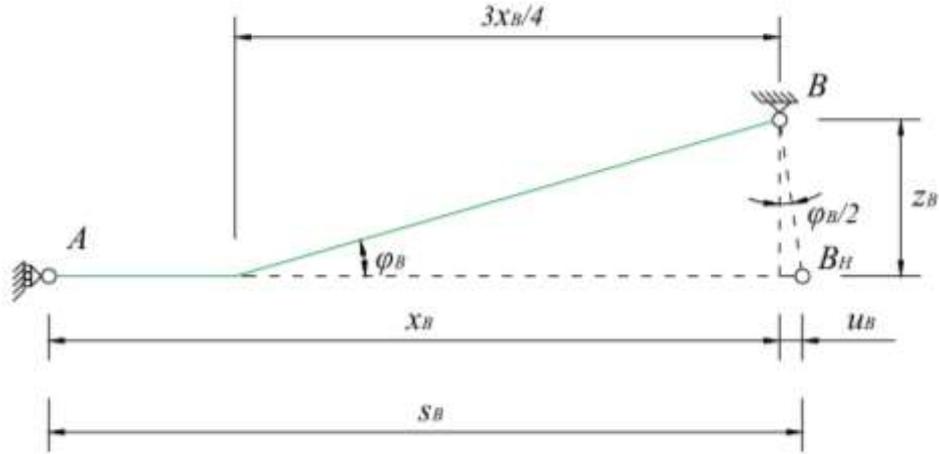


Figura 3: Sistema de barras que resuelve la longitud, ángulo ϕ_B .

La figura 3 representa el semi-vano derecho del cable, el semivano izquierdo se ha sustituido por un apoyo móvil en el eje vertical en el vértice A , ver figura 3. El punto B_H representa la posición del extremo derecho del cable, desarrollado en horizontal y con la fuerza horizontal H aplicada. El segmento $\overline{B_H B}$ por tanto, representa el desplazamiento del extremo derecho del cable durante el izado del cable, o durante la aplicación de la fuerza vertical V . Tiene de componentes horizontal y vertical: u_B y z_B respectivamente, y se considera a u_B positivo hacia la izquierda.

3.2. MODELO DE BARRAS ARTICULADAS. ESTÁTICA.

El principal problema a solventar es que la estática no permite barras con masa y situadas horizontalmente. To obtain a model of articulated bars and a distribution of point masses (weights), both in coherence with the geometry of figure 3 above, we use the Arquímedes method. Consiste en obtener el área de un arco de parábola, utilizando triángulos inscritos (línea roja en la figura 4), y triángulos circunscritos en la misma (línea verde). Como se conocen las coordenadas de la parábola (curva azul), el planteamiento consiste en obtener una recta poligonal dividiendo las coordenadas horizontales por la mitad en cada iteración, la figura 4b representa la segunda iteración, y esto se hace por exceso y por defecto.

El resultado se obtiene acotando el área real, entre el área de los triángulos tanto por defecto: línea poligonal roja en la figura 4 y que proporciona el área a_1 , como por exceso: línea poligonal verde y que aporta el área A_1 [7]. A medida que aumenta el número de triángulos, el perfil parabólico se acerca al perfil poligonal y las áreas se acercan. En la figura 4, sólo se representan dos iteraciones.

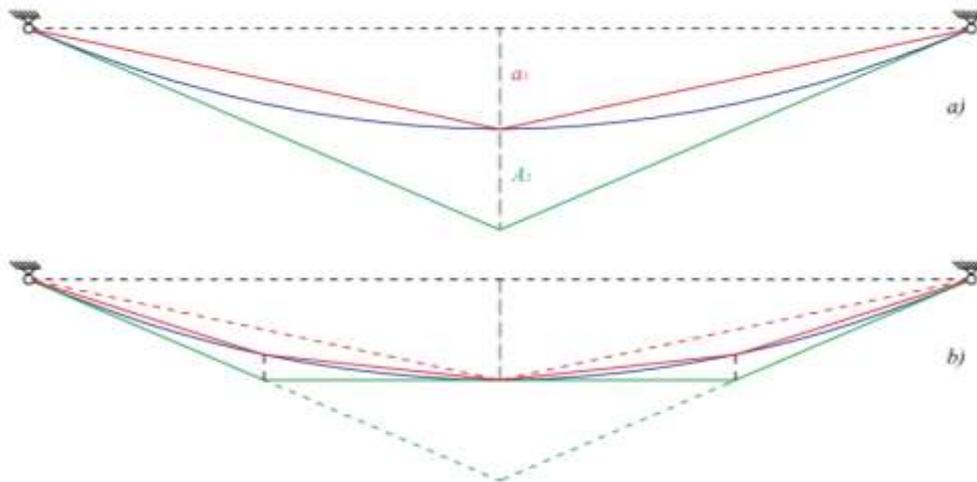


Figura 4: Parábola (línea azul), triángulos inscritos (línea roja) y triángulos circunscritos (línea verde). Adapted from [7].

El procedimiento para discretizar el cable se representa en la figura 5 y se parte de la línea poligonal verde de la figura 4 anterior. Start by reducing the cable to a single point mass (weight) $N=1$ (W/N), which is located between two articulated bars situated at the centre of the cable's gravedad, at the centre of the vane (green lines in figure 5a). El triángulo correspondiente a la línea verde de figura 5a, representa sólo la pendiente del perfil, ángulo θ_B y mediante cálculo se pueden conseguir el ángulo φ_B así como el resto de magnitudes. Son sólo de interés las magnitudes representadas gráficamente, al resto se le asigna el conjunto vacío por no estar dibujadas, ver ecuación (16):

$$\theta_B, \quad \varphi_B = \emptyset, \quad z_B = \emptyset, \quad u_B = \emptyset \quad (16)$$

A continuación, la carga puntual del paso $N=1$ se divide en dos cargas puntuales $N=2$, de modo que el centro de gravedad del conjunto permanece en la misma posición de la masa puntual anterior ($N=1$). La articulación correspondiente permanece, y al quedarse sin masa, se representa como una circunferencia o círculo vacío (sin carga). Las dos masas puntuales ($N=2$) de peso (W/N), pasan al centro de las barras articuladas según la figura 5b. La línea poligonal verde correspondiente a la figura 5b, incluye la pendiente del perfil, ángulo θ_B , mediante cálculo el ángulo φ_B , y la coordenada vertical del punto B z_B , ver ecuación (17).

$$\theta_B, \quad \varphi_B = \emptyset, \quad z_B = \frac{x_B \theta_B}{2}, \quad u_B = \emptyset \quad (17)$$

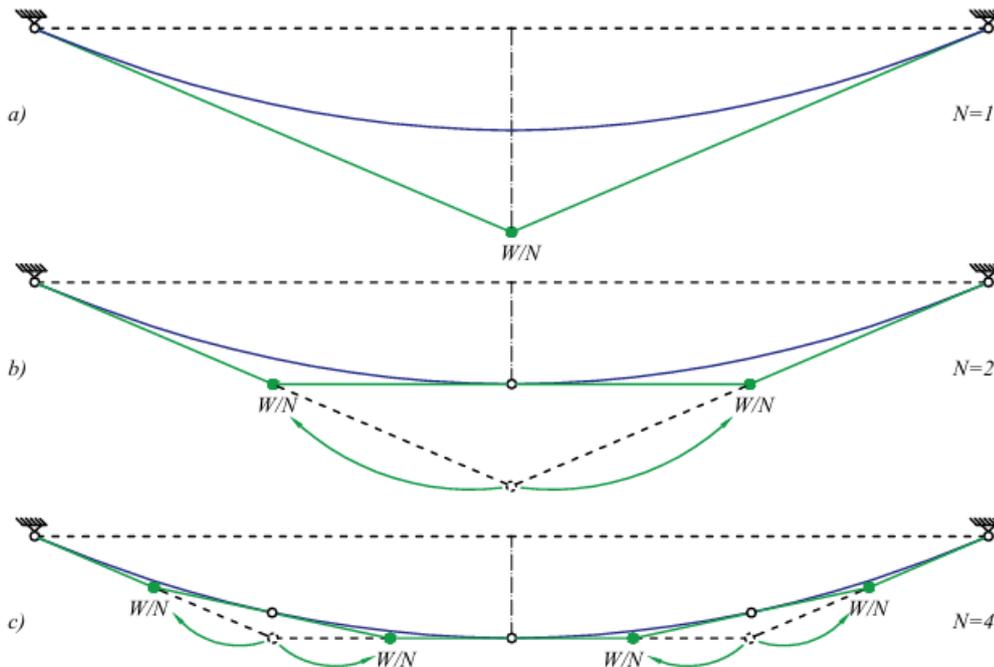


Figura 5: Algoritmo de discretización basado en triángulos de Arquímedes circunscritos para una ($N=1$), dos ($N=2$) y cuatro ($N=4$) masas puntuales.

For $N=4$, repeat the same process, dividing each dotted line into two equivalents and applying them to two new joints (green circles in figure 5c). The original joint is left unloaded (empty circles or circunferencias in figure 5c). Por tanto, el aspecto más importante a destacar del modelo para $N=4$, es que aparece el ángulo deseado φ_B . La línea poligonal verde correspondiente a la figura 5c, incluye: la pendiente del perfil, ángulo θ_B , el ángulo φ_B de la cuerda o proyección de todas las barras inclinadas hasta el punto B, la coordenada vertical del punto B z_B , and the magnitude u_B , ver ecuación (18).

$$\theta_B, \quad \varphi_B = \frac{2\theta_B}{3}, \quad z_B = \frac{3x_B}{4} \varphi_B, \quad u_B = z_B \frac{\varphi_B}{2} \quad (18)$$

La figura 6 representa el modelo discretizado para $N=4$, con el ángulo φ_B que resuelve el problema geométrico de la longitud, y con una distribución de masas puntuales que resuelven el problema de la estática. Figure 6 shows the articulated bar model. Si se aumenta el número de barras y por tanto N , el modelo se convierte en un modelo discretizado descrito en la bibliografía [4].

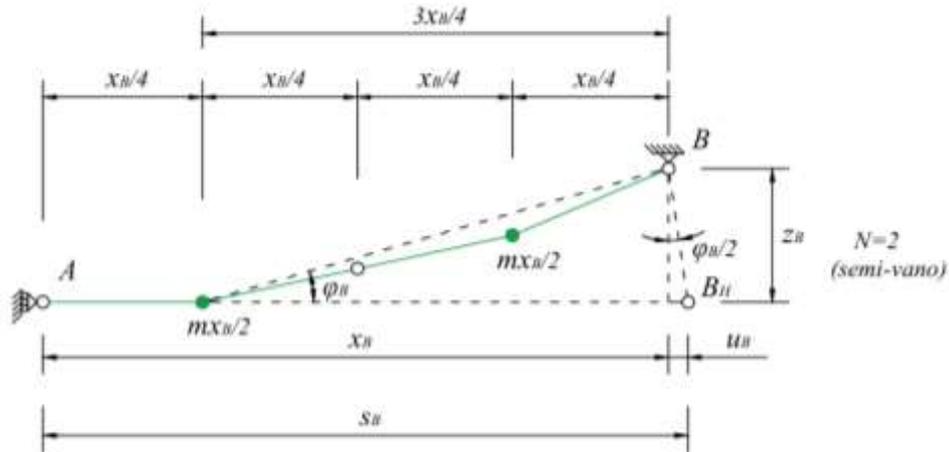


Figura 6: Modelo discretizado para $N=4$ ($N=2$ para el semi-vano), donde aparece el ángulo φ_B .

3.2. CAMIBO DE CONDICIONES.

La figura 7 muestra el estado del cable para unas condiciones iniciales φ_{B1} , y para otras condiciones finales diferentes φ_{B2} , - líneas azul y roja respectivamente. Se utiliza el azul ya que se admiten condiciones frías, y rojo para mayor temperatura o condiciones calientes.

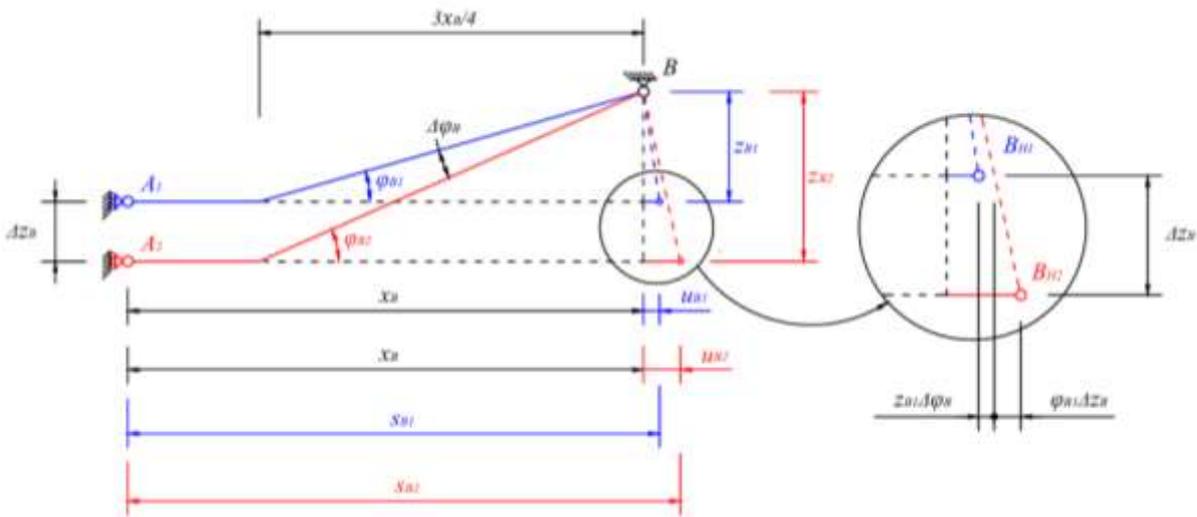


Figura 7: Modelo propuesto aplicado a condiciones iniciales y finales.

El equilibrio estático en el eje vertical del punto B para las condiciones iniciales queda:

$$\theta_{B1} \approx \frac{m_1 x_B}{H_1}, \quad \varphi_{B1} = \frac{2}{3} \theta_{B1} \quad (19)$$

El resto de magnitudes se pueden conseguir a través de relaciones geométricas presentes en la figura 7.

$$z_{B1} = \frac{3x_B}{4} \varphi_{B1}, \quad u_{B1} = z_{B1} \frac{\varphi_{B1}}{2}, \quad s_{B1} = x_B + u_{B1} \quad (20)$$

Al darse un cambio de condiciones, todas las magnitudes de ecuación (20) cambian excepto el vano que es constante, y por tanto, la coordenada horizontal del punto B. $x_B = \frac{l}{2}$. Todas las magnitudes de ecuación (21) pueden obtenerse gráficamente como producto de un radio por ángulo. La variación del desplazamiento horizontal Δu_B tiene dos componentes, ya que se trata de la variación de un producto. Both can be realised graphically as shown in figure 7, see illustration (21b).

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

$$\Delta z_B = \frac{3x_B}{4} \Delta \varphi_B \quad (21a)$$

$$\Delta u_B = \frac{\varphi_B}{2} \Delta z_B + z_B \frac{\Delta \varphi_B}{2} \rightarrow \Delta u_B = z_B \Delta \varphi_B \quad (21b)$$

$$\Delta s_B = \Delta u_B \rightarrow \Delta s_B = z_B \Delta \varphi_B \quad (21c)$$

El modelo discretizado para $N=4$ representado en las figuras 6 y 7, y las relaciones geométricas del mismo dadas en las ecuaciones (20) y (21), describen completamente el modelo de barras articuladas buscado.

4. RESULTS.

Para verificar el modelo discretizado propuesto en la figura 6, se aplica para resolver el cambio de respuesta estática en cables aplicados a líneas aéreas con una relación entre flecha y vano menor de un octavo ($d/l < 1/8$) [5]. De este modo se permite la aproximación del perfil hiperbólico al parabólico.

4.1. PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO.

Como resultado se obtiene un procedimiento de cálculo que consiste en aplicar las variaciones de longitudinadas proporcionadas en ecuación (21), y que pueden obtenerse analizando el modelo de barras articuladas propuesto en las figuras 6 y 7. El procedimiento consiste en aplicar tres pasos (mínimo):

PASO 0: Cable Inextensible.

In an inextensible cable the angle φ_B se mantiene constante según la ecuación (21c). Therefore, if the load per unit length changes from m_1 to m_2 , the horizontal force changes according to equation (22).

$$\varphi_{B(0)} = \varphi_{B1} \rightarrow H_{2(0)} = \frac{m_2}{m_1} H_1 \quad (22)$$

PASO 1: Corrección de longitud por la ley de Hooke y la temperatura.

Para un cable extensible, se igualan la variación geométrica de la longitud de según ecuación (21c), y la variación de longitud debida a la ley de Hooke y a la variación de temperatura. Resulta:

$$\Delta \varphi_{B(0)} = \frac{1}{z_{B(0)}} \left[\frac{(H_{2(1)} - H_{2(0)})}{EA} x_B + \alpha(t_2 - t_1)x_B \right], \quad z_{B(0)} = z_{B1} \quad (23)$$

El nuevo estado estático y la solución para el paso 1 son:

$$\varphi_{B(1)} = \varphi_{B(0)} + \Delta \varphi_{B(0)} \rightarrow H_{2(1)} \quad (24)$$

El criterio de parada se establece según la ecuación (25), y para e se admite un valor del 2%:

$$\frac{\Delta \varphi_{B(0)}}{\varphi_{B(0)}} 100 < e \quad (25)$$

PASO 2: Segunda corrección por la ley de Hooke.

Se aplica otra corrección debida a la ley de Hooke similar a la realizada en el paso anterior.

$$\Delta \varphi_{B(1)} = \frac{1}{z_{B(1)}} \left[\frac{(H_{2(1)} - H_{2(0)})}{EA} x_B \right] \quad (26)$$

Result:

$$\varphi_{B(2)} = \varphi_{B(1)} + \Delta \varphi_{B(1)} \rightarrow H_{2(2)} \quad (27)$$

 Ingeniería e Industria	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

El procedimiento puede continuar con más pasos, si bien para el cálculo manual se recomienda utilizar sólo los tres descritos. The reason is that $\Delta\varphi_{B(1)}$ es prácticamente nulo en todos los casos estudiados.

El criterio de parada se establece según la ecuación (28), y para e se admite un valor del 2%:

$$\frac{\Delta\varphi_{B(1)}}{\varphi_{B(1)}} 100 < e \quad (28)$$

4.2. ERRORES APLICADOS A LÍNEAS AÉREAS DE BT.

Las características mecánicas de los cables: tensión de rotura T_R , peso propio del cable m_c , sección transversal A , diámetro del cable d_c , módulo de Young E y coeficiente de expansión térmica α , se dan en la Tabla I.

Designación	Características
<i>RZ 3x50 Al/54.6 Alm</i>	$T_R = 16600 \text{ N};$ $w_c = 7,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1};$ $A = 54,6 \text{ mm}^2;$ $d_c = 36 \cdot 10^{-3} \text{ m};$
<i>RZ 3x95 Al/54.6 Alm</i>	$T_R = 16600 \text{ N};$ $w_c = 12,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1};$ $A = 54,6 \text{ mm}^2;$ $d_c = 44 \cdot 10^{-3} \text{ m};$
<i>RZ 3x150 Al/80 Alm</i>	$T_R = 20000 \text{ N};$ $w_c = 16,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1};$ $A = 80 \text{ mm}^2;$ $d_c = 51 \cdot 10^{-3} \text{ m};$
Parámetros comunes	$E = 62000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}; \quad \alpha = 23 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Tabla I: Características de los cables.

Siguiendo el REBT [8], se parte de unas las condiciones iniciales siguientes: una fuerza exterior horizontal máxima H_1 obtenida para un coeficiente de seguridad mayor que 3, se utiliza 4,5 por ser habitual en líneas aéreas de BT, una carga unitaria de longitud m_1 combinando el peso propio del conductor m_c con condiciones de viento m_v , y una temperatura inicial t_1 - todo según la ecuación (29) y Tabla I ó II, según corresponda para cables de aluminio o acero:

$$H_1 = \frac{T_R}{4,5}, \quad m_1 = \sqrt{(m_c^2 + m_w^2)}, \quad m_v = 500d_c, \quad t_1 = 15 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (29)$$

4.2.1. Respuesta estática.

El objetivo del problema es obtener la fuerza horizontal externa para las condiciones finales H_2 , ajustadas al REBT [8] y definidas en la ecuación (30).

$$m_2 = m_c, \quad t_2 = 50 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (30)$$

H_2 se obtiene resolviendo ecuación (31) mediante Newton-Raphson para perfiles parabólicos, y con el valor inicial H_1 .

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

$$\frac{x_B^3}{6\rho_2^2} - \frac{x_B^3}{6\rho_1^2} = \frac{H_2 - H_1}{EA} x_B + \alpha(t_2 - t_1)x_B, \quad \rho_i = \frac{m_i}{H_i}, \quad i = 1,2 \quad (31)$$

La solución de ecuación (29) se resuelve mediante el programa MatLab [9] y se denomina H_{2_sol} . Se utiliza para calcular los errores de cada iteración o paso: $H_{2(0)}$ según ecuación (22), $H_{2(1)}$ according to steps (23) and (24) and $H_{2(2)}$ según ecuaciones (25) y (26). Se calculan según ecuación (32).

$$e(i) = \frac{(H_{2(i)} - H_{2_sol})}{H_{2_sol}} 100, \quad i = 0,1,2 \quad (32)$$

Los resultados de aplicar ecuación (32) a los cables de la tabla I, se dan en la tabla II siguiente.

<i>l</i>	40 m	50 m	60 m
RZ 3x50 Al/54.6 Alm			
<i>e(0)</i>	-0,2828	-0,1113	-0,0457
<i>e(1)</i>	-0,0058	0,0063	0,0122
<i>e(2)</i>	-0,0285	-0,0001	0,0099
RZ 3x95 Al/54.6 Alm			
<i>e(0)</i>	-0,1994	-0,1145	-0,0569
<i>e(1)</i>	0,0224	-0,0202	-0,0105
<i>e(2)</i>	0,0085	-0,0241	-0,0119
RZ 3x150 Al/80 Alm			
<i>e(0)</i>	-0,5512	-0,2433	-0,1219
<i>e(1)</i>	-0,1372	-0,0621	-0,0313
<i>e(2)</i>	-0,1644	-0,0702	-0,0342

Tabla II: Resultados. Errores para cada paso en %.

6. DISCUSSION

Este trabajo proporciona un procedimiento iterativo para resolver la ecuación de cambio de estado estático en cables suspendidos. Las magnitudes principales, incluida la longitud del arco de parábola, se obtienen gráficamente y mediante relaciones geométricas sencillas, gracias a un procedimiento de discretización basado en técnicas de Arquímedes. El método propuesto es didáctico, ya que permite trabajar la respuesta estática de cables utilizando habilidades matemáticas habituales en educación secundaria.

En todos los casos estudiados, con tres iteraciones se consiguen errores inferiores al 0,5% de la solución realizada mediante Newton-Raphson, según la Tabla II. Además, desde la primera iteración se consiguen errores inferiores al 1%, hecho que se considera de gran valor para las primeras etapas del diseño.

Se ha planteado como un método de cálculo de tres pasos:

1. Paso 0: Cable inextensible.
2. Step 1: Corrección por la ley de Hooke y por la variación de temperatura.
3. Step 2: Segunda corrección por la ley de Hooke.

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

Las ecuaciones necesarias para desarrollar cada paso se pueden obtener a través de un modelo de barras articuladas propuesto que corresponde con las figuras 6 y 7. Se ha planteado así, para permitir el cálculo manual y convertir la ecuación de cambio de condiciones en una actividad puzzle, con unos datos y resultados concretos. The model described in figures 5 to 7, which corresponds to $N=4$ masas puntuales por vano, has the unique feature of making the length of the cable's parabolic arc implicit. If you increase the number of point machines N , it becomes a discretised cable model [4].

En cuanto a las limitaciones del método, se ha aplicado exclusivamente para solucionar problemas en líneas con apoyos al mismo nivel y con una curvatura pequeña, relación entre flecha y vano de un octavo ($d/l < 1/8$). Se ha aplicado a cables de baja tensión ya que se trata de cables con pesos por unidad de longitud (m) elevados. El mayor error se ha alcanzado en el cable más pesado, concretamente en el cable denominado *RZ 3x150 Al/80 Alm*, en el vano $l = 40 m$, which reached 0.55% in the first iteration, while the error in the third and final iteration was only 0.16%. Se ha desarrollado para este caso material complementario, en el cual se desarrolla cada iteración. En este mismo caso, el error sube desde 0,1372, hasta 0,1644 en valor absoluto en las dos últimas iteraciones, se debe a que el criterio de parada del procedimiento no se cumple según ecuaciones (25) y (28). El criterio de parada se cumple en la tercera iteración y en la misma, el error sube respecto a la solución obtenida mediante Newton-Raphson y el software matlab.

El modelo propuesto se aplica, ya que parte de ideas de Arquímedes aplicadas a parábolas, exclusivamente a perfiles parabólicos.

7. CONCLUSIONS Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo, se ha obtenido un método para obtener gráficamente la longitud de un arco de parábola, mediante un sistema de barras articuladas basado en procedimientos de Arquímedes. Por tanto, se consigue un método gráfico para el cálculo de la ecuación de cambio de condiciones estáticas en líneas aéreas. Dicho método proporciona además un procedimiento iterativo con errores aceptables desde la primera iteración, y sólo son necesarias tres iteraciones como máximo para alcanzar una solución.

Para trabajos futuros, se pueden utilizar vanos más largos que no puedan aproximarse mediante perfiles parabólicos, y dividirlos en tramos parabólicos a los cuales sí se puede aplicar el modelo propuesto. Es decir, aplicar el sistema de barras articuladas propuesto como un elemento finito para cables suspendidos con perfiles hiperbólicos.

Otras tareas pendientes incluyen aplicar el modelo al estudio de vibraciones dinámicas del cable, estudiar el fenómeno del galloping [10], aplicar el modelo a líneas con múltiples vanos [2,11] y resolver otro tipo de problemas, como por ejemplo efectos de la temperatura en estructuras multi-cable [12], etc.

REFERENCES

- [1] M. Kermani, L. Farzaneh, and L. E. Kollár, "Estimation of stresses in atmospheric ice during aeolian vibration of power transmission lines," *J. Wind Ind. Aerodyn.*, vol. 98, no. 10-11, p. 592-599, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2010.05.002>
- [2] C. Wu, B. Yan, L. Zhang, B. Zhang, and Q. Li, "A method to calculate jump height of iced transmission lines after ice-shedding," *Cold. Reg. Sci. Technol.*, vol. 125, p. 40-47, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2016.02.001>
- [3] M. Lepidi, and V. Gattulli, "Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, no. 9, p. 1103-1116, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.01.008>
- [4] H.M. Irvine, Cable structures, in: MIT Press Series in Structural Mechanics, MIT Press, ISBN: 9780262090230, 1981.
- [5] F. Treysède, "Free linear vibrations of cables under thermal stress," *J. Sound Vib.*, vol. 327, no. 1-2, p. 1-8, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.07.005>
- [6] J. Agüero-Rubio, J. López-Martínez, M. Gómez-Galán, and A. J. Callejón-Ferre, "A Didactic Procedure to Solve the Equation of Steady-Static Response in Suspended Cables," *Mathematics*, vol. 8, no. 9, p. 1468, 2020. <https://doi.org/10.3390/math8091468>
- [7] G. Swain, and T. Dence, "Archimedes' quadrature of the parabola revisited," *Math. Mag.*, vol. 71, no. 2, p. 123-130, 1998. <https://doi.org/10.1080/0025570X.1998.11996612>
- [8] Real Decreto 842/2002 de 2 de agosto, por el que se aprueba el reglamento electrotécnico de Baja Tensión y sus instrucciones complementarias. Boletín Oficial del Estado de 18 de septiembre de 2002, núm. 224, p. 33084 a 33086. España.
- [9] T. F. Coleman and Y. Li, "An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds," *SIAM J. Optimiz.*, vol. 6, no. 2, p. 418-445, 1996. <https://doi.org/10.1137/080602>

 Ingeniería e Industria	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

- [10] F. Foti, M. Martinelli, and F. Perotti, "A finite element approach to model galloping vibrations of iced suspended cables," *in X International Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2017)*, *Procedia Eng.*, vol. 199, p. 3127-3132, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.09.562>
- [11] B. Zemljarič and V. Ažbe. "Calculating a conductor's temperature-related sag as the limiting value for a Dynamic Line Rating", *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 234, p. 110606, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2024.110606>
- [12] F. Treysède. "Finite element modeling of temperature load effects on the vibration of local modes in multi-cable structures", *J. Sound Vib.*, vol. 413 (2018), p. 191-204. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.10.022>

AGRADECIMIENTOS

A la consejería de Educación de la Junta de Andalucía por la licencia por estudios concedida en el curso 2011-12, y promover un trabajo de investigación que da como fruto el presente trabajo.

A los departamentos de electricidad del IES Alhamilla de Almería y del IES Alyanub de Vera en Almería, por la predisposición favorable a la búsqueda de nuevas opciones didácticas. Y a sus estudiantes, por aceptar con buen ánimo la resolución de los problemas planteados en esta investigación. También agradecer al grupo de investigación "Tecnologías industriales y agrícolas (TEP987)" de la Universidad de Almería, por financiar este trabajo.

MATERIAL SUPLEMENTARIO

ANEXO

EJEMPLO DE APLICACIÓN :

En un vano, $l=40\text{ m}$, se tiende un cable de baja tensión tipo $RZ\ 3x150\text{ Al}/54,6\text{ Alm}$ con los siguientes datos:

- Fuerza de rotura: $T_R = 2000\text{ daN}$;
- Coeficiente de seguridad: $CS = 4,5$;
- Peso del conductor por unidad de longitud: $m_c = 1,67\text{ daN} \cdot \text{m}^{-1}$;
- Área del cable (sección recta): $A_S = 80\text{ mm}^2$;
- Diámetro del conductor: $d_c = 51 \cdot 10^{-3}\text{ m}$;
- Módulo elástico: $E = 6200\text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$;
- Coeficiente de dilatación por temperatura: $\alpha = 23 \cdot 10^{-6}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$;

See pide:

- Tensión máxima y flecha mínima, sabiendo que la tensión máxima del cable se da en las siguientes condiciones iniciales: $t_1 = 15\text{ }^\circ\text{C}$ y condiciones de viento según ITC BT 06 del REBT [8].
- Minimum and maximum voltage. Remember that the minimum voltage is given in the final conditions: $t_2 = 50\text{ }^\circ\text{C}$ según ITC BT 06 del REBT [8].

a)

Se aplica el coeficiente de seguridad a la fuerza (tensión) de rotura T_R , se admite que $V \ll H$ y por tanto que el ángulo θ_B es suficientemente pequeño. Por lo que se puede aproximar la tensión máxima del cable a su componente horizontal, ver figura 1.

$$T_1 = \frac{T_R}{CS} \rightarrow T_1 = \frac{2000\text{ daN}}{4,5} = 444\text{ daN}, \quad T_1 \approx H_1 = 444\text{ daN}$$

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

Según ITC 06 del REBT [8], el viento en líneas aérea de BT se considera como una presión sobre la superficie del conductor de valor 50 daN/m^2 en horizontal.

$$m_v = 500d_c \rightarrow m_v = 50 \cdot 51 \cdot 10^{-3} = 2,55 \frac{\text{daN}}{\text{m}}$$

El peso del semi-vano y el peso por unidad de longitud, combinando peso de conductor y viento, ambos en las condiciones iniciales quedan:

$$m_1 = \sqrt{(m_c^2 + m_v^2)} \rightarrow m_1 = \sqrt{(1,67^2 + 2,55^2)} = 3,05 \frac{\text{daN}}{\text{m}}$$

$$W_1 = m_1 \frac{l}{2} \rightarrow W_1 = 3,05 \cdot 20 = 61 \text{ daN}$$

Y el ángulo que define la parte estática:

$$\theta_{B1} \approx \frac{W_1}{H_1} \rightarrow \theta_{B1} = \frac{61}{444} = 137,38 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

To obtain the value of the vertical coordenada at point B in the initial conditions z_{B1} , the equilibrium equation of moments with respect to point B is applied, see figure 1.

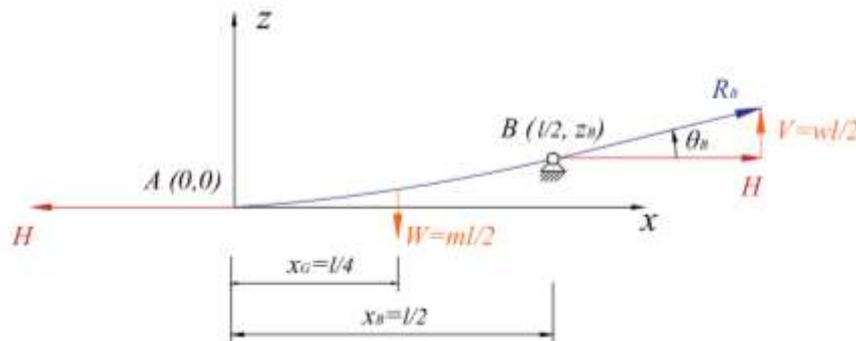


Figure 1: Fuerzas externas que actúan sobre un semivano: peso W (Weight) y componentes horizontal H y vertical V de la reacción en B , R_B .

El centro de gravedad del cable x_G , se admite en el centro del semi-vano.

$$\sum_B M = 0 \rightarrow W_1 \cdot (x_B - x_G) - H_1 \cdot z_{B1} = 0,$$

$$61 \cdot 20 - 444 \cdot z_{B1} = 0 \rightarrow z_{B1} = 2,75 \text{ m.}$$

La relación flecha entre vano ha de ser menor de un octavo para admitir la aproximación de la parábola, $(d/l < 1/8)$ [5]. En este caso:

$$\frac{2,75}{40} < \frac{1}{8} \rightarrow 0,069 < 0,125$$

b)

El equilibrio estático en el eje vertical del punto B define el estado completo del cable a través φ_B o θ_B . El método propuesto comienza aplicando las ecuaciones de la estática al punto B en las condiciones iniciales.

$$x_B = \frac{l}{2} = 20 \text{ m}, \quad \theta_{B1} \approx 137,38 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \varphi_{B1} \approx \frac{2\theta_{B1}}{3} = 91,59 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Tanto la variable u_B , como sus variaciones Δu_B , necesarias para el desarrollo del método propuesto, se pueden obtener gráficamente de la figura 2 aplicando el producto de radio por ángulo (aproximación válida al trabajar con ángulos pequeños). Para las condiciones iniciales, línea azul:

$$u_{B1} = z_{B1} \frac{\varphi_{B1}}{2}, \quad s_{B1} = x_B + u_{B1}$$

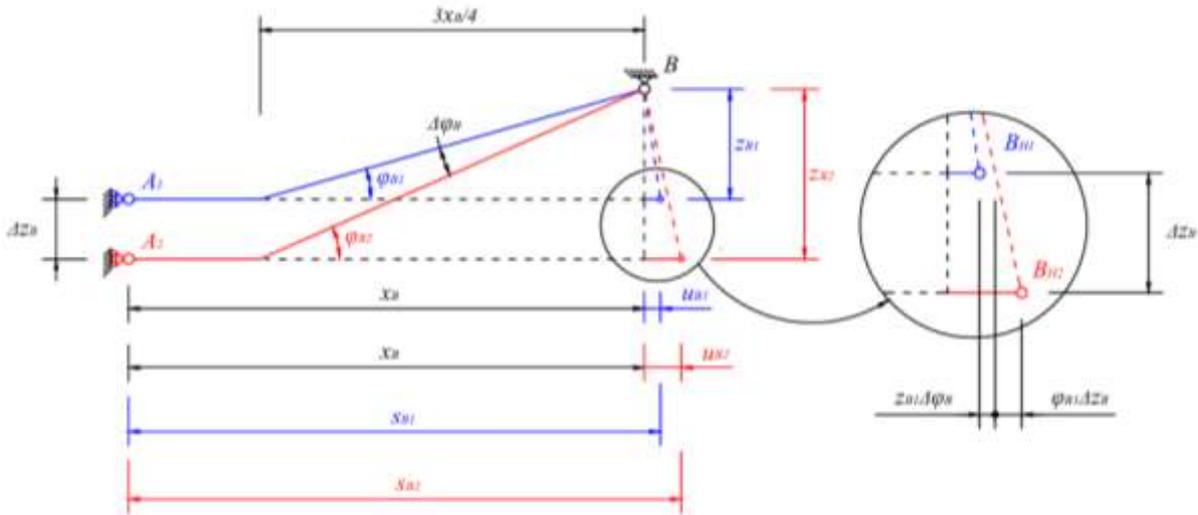


Figura 2: Modelo propuesto aplicado a condiciones iniciales y finales.

Las variaciones Δu_B , se pueden obtener gráficamente o como la derivada de un producto.

$$\Delta u_B = \frac{1}{2} (\varphi_B \Delta z_B + z_B \Delta \varphi_B)$$

Se calcula el incremento de la coordenada vertical, Δz_B , and is substituted in the previous example:

$$z_B = \frac{3x_B}{4} \varphi_B, \quad x_B = cte. \rightarrow \Delta z_B = \frac{3x_B}{4} \Delta \varphi_B,$$

$$\Delta u_B = \frac{1}{2} \left(\frac{3x_B}{4} \varphi_B \Delta \varphi_B + z_B \Delta \varphi_B \right) \rightarrow \Delta u_B = z_B \Delta \varphi_B$$

Se relaciona la variación del desplazamiento Δu_B , con la variación de longitud Δs_B :

$$s_B = x_B + u_B, \quad x_B = cte. \rightarrow \Delta s_B = \Delta u_B$$

Y sustituyendo se obtiene:

$$\Delta s_B = z_B \Delta \varphi_B$$

Esta ecuación es la herramienta que necesitamos para realizar el método de tres iteraciones. Relates the variation in length to the geometry of the cable. Allows you to go from the initial conditions, coloured blue lines, to the final conditions, coloured red lines. Se aplican los tres pasos del método propuesto:

PASO 0: Cable Inextensible.

In an inextensible cable el ángulo φ_B se mantiene constante según la ecuación anterior. Therefore, if the load per unit length changes from m_1 to m_2 , the horizontal force changes according to the equation (22).

$$\varphi_{B(0)} = \varphi_{B1}, \quad H_{2(0)} = \frac{m_2}{m_1} H_1 \rightarrow H_{2(0)} = \frac{1,67}{3,05} 444 = 243,11 \text{ daN}$$

PASO 1: Corrección de longitud por la ley de Hooke y la temperatura.

Para un cable extensible, se igualan la variación geométrica de la longitud según ecuación (21c), y la variación de longitud debida a la ley de Hooke y a la variación de temperatura. Resulta:

	GRAPHIC METHOD USING A SYSTEM OF ARTICULATED LINKS TO CALCULATE THE STATIC RESPONSE OF SUSPENDED CABLES	Electrical engineering and technology 3306.09
COLLABORATION	José Agüero-Rubio, Javier López-Martínez, Marta Gómez-Galán, y Ángel-Jesús Callejón-Ferre	Transmission and distribution

$$\Delta\varphi_{B(0)} = \frac{1}{z_{B(0)}} \left[\frac{(H_{2(1)} - H_{2(0)})}{EA} x_B + \alpha(t_2 - t_1)x_B \right], \quad z_{B(0)} = z_{B1}$$

$$\Delta\varphi_{B(0)} = \frac{1}{2,75} \left[\frac{(243,11 - 444)}{6200 \cdot 80} 20 + 23 \cdot 10^{-6} (50 - 15) 20 \right] = 2,91 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

El nuevo estado estático y la solución para el paso 1 son:

$$\varphi_{B(1)} = \varphi_{B(1)} = \varphi_{B(0)} + \Delta\varphi_{B(0)}$$

$$\varphi_{B(1)} = 91,59 \cdot 10^{-3} + 2,91 \cdot 10^{-3} = 94,5 \cdot 10^{-3}, \quad \theta_{B(1)} = \frac{3}{2} \varphi_{B(1)} = 141,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$H_{2(1)} = \frac{w_2 x_B}{\theta_{B(1)}} = \frac{1,67 \cdot 20}{141,75 \cdot 10^{-3}} = 235,67 \text{ daN}$$

Se comprueba el criterio de parada:

$$\frac{\Delta\varphi_{B(0)}}{\varphi_{B(0)}} 100 = \frac{2,91 \cdot 10^{-3}}{91,59 \cdot 10^{-3}} 100 = 3,17\% < 2\%$$

PASO 2: Segunda corrección por la ley de Hooke.

Se aplica otra corrección debida a la ley de Hooke.

$$\Delta\varphi_{B(1)} = \frac{1}{z_{B(1)}} \left[\frac{(H_{2(1)} - H_{2(0)})}{EA} x_B \right], \quad z_{B(1)} = \frac{3x_B}{4} \varphi_{B(1)}$$

$$\Delta\varphi_{B(1)} = \frac{1}{1,42} \left[\frac{(235,67 - 243,11)}{6200 \cdot 80} 20 \right] = -2,11 \cdot 10^{-4}, \quad z_{B(1)} = \frac{3x_B}{4} \varphi_{B(1)} = \frac{3 \cdot 20}{4} 94,5 \cdot 10^{-3} = 1,42 \text{ m}$$

El nuevo estado estático y la solución para el paso 2 son:

$$\varphi_{B(2)} = \varphi_{B(1)} + \Delta\varphi_{B(1)}$$

$$\varphi_{B(2)} = 94,5 \cdot 10^{-3} - 2,11 \cdot 10^{-4} = 94,3 \cdot 10^{-3}, \quad \theta_{B(2)} = \frac{3}{2} \varphi_{B(2)} = 141,43 \cdot 10^{-3}$$

$$H_{2(2)} = \frac{w_2 x_B}{\theta_{B(2)}} = \frac{1,67 \cdot 20}{141,43 \cdot 10^{-3}} = 236,16 \text{ daN}$$

Se comprueba el criterio de parada:

$$\frac{\Delta\varphi_{B(1)}}{\varphi_{B(1)}} 100 = \frac{2,11 \cdot 10^{-4}}{94,5 \cdot 10^{-3}} 100 = 0,22\% < 2\%$$

This iteration fulfils the parada criterion and therefore completes the calculation.